PENSAMENTO ALGÉBRICO E ANÁLISE DE ERROS: ALGUMAS REFLEXÕES SOBRE DIFICULDADES APRESENTADAS POR ESTUDANTES DE CURSOS SUPERIORES

ALGEBRAIC THINKING AND ERROR ANALYSIS: SOME REFLECTIONS ON DIFFICULTIES PRESENTED BY STUDENTS OF GRADUATE COURSES

Helena Noronha Cury*
Marcelo de Freitas Bortoli**

Resumo

Neste artigo, trazemos algumas considerações sobre Álgebra e pensamento algébrico e buscamos entender dificuldades de alunos ao resolverem problemas que envolvem Álgebra. A seguir, ilustramos essas dificuldades com resultados de duas investigações, nas quais foram analisados e classificados erros cometidos por estudantes de Ensino Superior, ao solucionarem duas questões de Álgebra do Ensino Fundamental. Concluímos que os alunos cujas respostas foram consideradas parcial ou totalmente erradas não têm o pensamento algébrico desenvolvido e não dominam o conhecimento de entes algébricos, de suas operações e propriedades. Também apresentam dificuldades em relação às atividades transformacionais ou baseadas em regras e quanto à capacidade de abstração e generalização.

Palavras-chave: Álgebra. Pensamento algébrico. Análise de erros.

Abstract

In this paper, we bring some considerations on Algebra and algebraic thinking and we seek to understand students´ difficulties to solve problems involving algebra. Below, we illustrate these difficulties with results of two investigations in which were analyzed and classified errors committed by students of higher education, when solving two questions of elementary school algebra. We concluded that students whose responses were partially or totally wrong have not developed algebraic thinking or mastered the knowledge of algebraic entities, its operations and properties. There are also difficulties in relation to transformational activities or based on rules and the capacity for abstraction and generalization.

Keywords: Algebra. Algebraic thinking. Error analysis.

* Professora Adjunta do Centro Universitário Franciscano, onde exerce atividades no Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática.
** Mestre em Ensino de Matemática pelo Centro Universitário Franciscano (UNIFRA, Santa Maria/RS) e Professor Nível Básico, Técnico e Tecnológico do Instituto Federal do Paraná (IFPR), Campus Palmas.

Introdução

Na análise das respostas de alunos de qualquer nível de ensino a questões que envolvem conteúdos de Álgebra, algumas vezes temos dúvidas sobre como classificar os erros cometidos, visto que não parecem ser relacionados ao conteúdo em si, mas às habilidades que deveriam já ter sido desenvolvidas pelos estudantes. Uma pergunta, então, se impõe: como se apresenta o pensamento algébrico? Como podemos situar um determinado tipo de solução apresentada pelo aluno, relacionado a conteúdos de Álgebra?

Neste artigo, apresentamos, inicialmente, algumas ideias de pesquisadores que têm procurado conceituar elementos do pensamento algébrico. A seguir, ilustramos a análise de erros cometidos por alunos universitários em questões que envolvem conteúdos de Álgebra da Educação Básica e buscamos entender as dificuldades dos alunos a partir das conceituações inicialmente apresentadas.

Para explicitar a análise de erros, relatamos parcialmente duas investigações realizadas com calouros de cursos superiores que cursam disciplinas matemáticas. Finalmente, apresentamos algumas sugestões para o trabalho com estudantes que apresentam dificuldades no desenvolvimento do pensamento algébrico.

A Álgebra e o Pensamento Algébrico

Kaput (1995), ao discutir a reforma da Álgebra nos Estados Unidos, comenta que não existe uma só Álgebra, visto que ela pode ser entendida como artefato cultural compartilhado, ao falarmos de "aprendizagem de frações, polinômios, fatoração, teoria dos anéis, álgebra linear, etc." (p. 6) ou como formas de pensamento, tais como "generalização, especialização, abstração, computação, analogização, justificação, etc." (Ibid., p. 6). Continuando, Kaput (1995) afirma que descrever a Álgebra requer uma mistura de ambas as acepções e que:

> Os atos de generalização e formalização gradual da generalidade construída devem preceder o trabalho com formalismos – do contrário os formalismos não têm origem na experiência do estudante. A total falência atual da álgebra escolar tem mostrado a inadequação das tentativas de vincular os formalismos à experiência do aluno, depois que eles foram introduzidos. Parece que "uma vez sem significado, sempre sem significado". (KAPUT, 1995, p. 6-7).[1]

Esta mesma citação foi invocada por Kirshner (2001) na sua defesa do que ele denomina "opção pela Álgebra estrutural" para a aprendizagem dessa disciplina na escola. Segundo ele, há duas abordagens para dar significado à Álgebra elementar: a estrutural, que "constrói significados internamente, a partir de conexões geradas no interior de um sistema sintaticamente construído"

---

[1] As citações de trechos em língua estrangeira foram traduzidas pelos autores deste artigo.

e a referencial, que "traz os significados para o sistema simbólico a partir de domínios externos de referência." (KIRSHNER, 2001, p. 84).

A primeira é aquela que se apropria do método axiomático da Matemática pura, partindo de termos primitivos e axiomas e deduzindo logicamente os teoremas. A segunda é a que procura dar significado aos símbolos algébricos a partir de apelos ao mundo real, aos gráficos, à busca de padrões e regularidades. No entanto, Kirshner não está satisfeito com a dicotomia estrutural-referencial, pois considera que é necessário criar um currículo que busque seus significados nas duas abordagens já citadas.

Revisando pressupostos epistemológicos e evidências de que os alunos iniciantes em Álgebra não operam, de forma logicamente consistente, um conjunto de regras ou axiomas, Kirshner (2001, p. 94) conclui que "a competência em habilidades algébricas não é uma questão de conhecer as regras, tanto quanto de coordenar sugestões perceptuais baseadas em padrões". O autor acredita que o fracasso dos currículos baseados em simples manipulações algébricas e prática de exercícios padronizados, que parece ter provocado uma ojeriza dos alunos em relação à Álgebra, levou a propostas que enfatizam o ensino dessa disciplina apoiado em reconhecimento de padrões e em situações da vida real.

Na opinião desse autor, não houve uma melhoria da situação com essa mudança e é por isso que ele sugere uma guinada, retomando a abordagem estrutural da Álgebra. Segundo ele, "se a racionalidade não é inerente à habilidade de manipulação algébrica, precisa ser promovida em aula por meio de atividades e discursos especializados." (KIRSHNER, 2001, p. 95). E, dessa forma, ele prescreve um caminho para o ensino de Álgebra, baseado em uma espécie de "gramática descritiva", que tente modelar as práticas reais dos usuários fluentes na linguagem algébrica.

Kieran (2004) propõe uma classificação das atividades algébricas em três tipos: geracional, transformacional e meta-nível/global. No primeiro tipo, estão inseridas as atividades que envolvem a formação de expressões e equações que são objetos da Álgebra, tais como equações a uma incógnita, expressões que provêm de padrões ou sequências numéricas e das que governam relações numéricas.

Em um segundo tipo, Kieran (2004) indica as atividades transformacionais ou baseadas em regras,

> [...] que incluem, por exemplo, reduzir termos semelhantes, fatorar, expandir, substituir, adicionar e multiplicar expressões polinomiais, elevar um polinômio a um determinado expoente, resolver equações, simplificar expressões, trabalhar com expressões equivalentes, etc. (p. 24).

No terceiro tipo, estão as atividades nas quais a Álgebra é usada como uma ferramenta, mas que não são exclusivas desse ramo do conhecimento da Matemática. É o caso da resolução de problemas, da modelagem, do estudo da variação, etc.

A autora comenta que os livros-texto de Álgebra enfatizam, em geral, os aspectos transformacionais e que muitas vezes, no seu ensino, a compreensão dos conceitos algébricos parece ficar separada do desenvolvimento das habilidades manipulativas; também considera que o aumento das pesquisas sobre o ensino de Álgebra "nos encoraja a pensar em compreensão técnica e conceitual como inter-relacionadas, ao invés de opostas." (p. 30).

Ainda sobre o mesmo tema, Ponte, Branco e Matos (2009) discutem diferentes perspectivas da Álgebra e do ensino de Álgebra e também se referem às diferentes visões sobre essa área da Matemática. Segundo eles, uma primeira visão, redutora, é aquela que considera a Álgebra como "um conjunto de *regras de transformações de expressões* (monómios, polinómios, fracções algébricas, expressões com radicais...) e processos de resolução de equações do 1º e 2º grau e de sistemas de equações". (p. 7-8. Grifo dos autores).

Uma segunda perspectiva é a que considera serem os símbolos o objeto central da Álgebra, dessa forma entendida como uma linguagem e seu uso sendo relacionado à manipulação desses símbolos e das expressões algébricas.

Segundo esses mesmos autores, dos debates sobre o que deve ser ensinado em Álgebra surgiu o interesse pela caracterização do pensamento algébrico, que vai muito além da manipulação dos símbolos. Vemos assim que Ponte, Branco e Matos (2009) parecem concordar com as ideias de Kaput (1995), referindo-se à importância de dar significado aos formalismos, no ensino de Matemática.

Em muitos textos que se reportam à Álgebra e ao seu ensino, aparece essa expressão, "pensamento algébrico", mas nem sempre há uma preocupação em defini-la, partindo os autores do que parece ser um conhecimento consensual sobre o termo.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) mencionam algumas vezes a expressão "pensamento algébrico" e, a partir de exemplos de situações em que esse pensamento se manifesta, apontam

> [...] elementos que consideramos caracterizadores do pensamento algébrico, tais como: percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização. (p. 87).

Pela própria forma de apresentar essa caracterização, bem como pelos exemplos citados, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) concluem que "não existe uma única forma de se expressar o pensamento algébrico." (p. 88). Assim podemos, já, aceitar a diversidade de tentativas de definição ou caracterização desse pensamento, dependendo do foco com que cada autor aborda tais características.

Lins (2001) refere-se à existência de várias caracterizações de Álgebra e de pensamento algébrico, citando algumas obras. Segundo ele, "cada autor faz suposições epistemológicas – implícita ou explicitamente, sendo muito mais frequente o primeiro caso." (p. 37). Ao desenvolver suas ideias, Lins reporta-se, em nota, à sua caracterização de pensamento algébrico, apresentada em texto anterior: "Eu caracterizei o pensamento algébrico como pensar aritmeticamente, internamente e analiticamente." (LINS, 2001, p. 59).

Já em Lins e Gimenez (1997), os autores declaram:

> [...] por incrível que pareça, não há consenso a respeito do que seja pensar algebricamente. Há, é verdade, um certo consenso a respeito de quais são as coisas da álgebra: equações, cálculo literal, funções, por exemplo, mas mesmo aí há diferenças – gráficos são ou não parte da álgebra? (p. 89).

Assim, Lins e Gimenez (1997) preferem caracterizar "atividade algébrica", para poder identificar sua ocorrência: "A atividade algébrica consiste no processo de produção de significados para a álgebra." (p. 137); para esclarecer o que entendem por Álgebra, os autores acrescentam: "a álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade. (Ibid., p. 137).

Revisando todas as ideias acima referidas, concordamos com Ponte, Branco e Matos (2009), quando consideram redutora a visão da Álgebra como conjunto de regras de transformações e processos de resolução e também julgamos importante focar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Aceitamos, também, a ideia de que a compreensão dos conceitos e o desenvolvimento de habilidades técnicas podem estar inter-relacionados. Por isso, face às dificuldades apresentadas por alunos universitários na resolução de questões que exigem conhecimentos de conteúdos e de habilidades supostamente trabalhadas nos anos finais do Ensino Fundamental, pensamos que esses estudantes não formaram, ainda, um pensamento algébrico que possa ser desenvolvido e que essas habilidades de manipulação algébrica, que podem ocasionar a compreensão lógica da Álgebra, precisam ser promovidas por meio de atividades especializadas.

Assim, um primeiro passo para ajudar esses alunos universitários a compreender os conceitos da Álgebra e a dominar as formas de pensamento algébrico é entender suas dificuldades e analisar suas resoluções de questões que envolvem conteúdos tradicionalmente inseridos nas matrizes curriculares como "conteúdos de Álgebra". Nesta análise, portanto, pretendemos identificar as dificuldades relacionadas aos processos de resolução de questões algébricas.

As Pesquisas Realizadas e os Procedimentos da Análise de Erros

Para ilustrar a análise de erros em Álgebra, trazemos dados parciais de duas investigações realizadas com alunos universitários que cursavam disciplinas matemáticas. A primeira pesquisa foi desenvolvida com uma amostra de 368 estudantes de nove Instituições de Ensino Superior do Rio Grande do Sul, que cursavam Engenharia, Ciência da Computação, Licenciatura em Matemática ou Ciências Contábeis. A eles, foi aplicado um teste com 12 questões de Matemática Básica.

A segunda investigação foi realizada com 31 alunos da disciplina de Pré-Cálculo, de cursos de Administração, Ciências Contábeis, Engenharia Agronômica, Química ou Sistemas de Informação, de uma Instituição de Ensino Superior do Paraná. O instrumento de pesquisa foi um teste com seis questões, também de Matemática Básica.

Nos testes aplicados aos participantes, em ambas as pesquisas, houve duas questões em comum. As análises dos erros nas resoluções dessas questões são apresentadas neste artigo para posterior comparação e discussão das dificuldades dos alunos. É importante destacar que cada pesquisador, ao deparar-se com um *corpus*, produz uma categorização que evidencia sua visão específica do assunto. Assim, apesar de termos questões idênticas, não só as respostas dos participantes das duas pesquisas são distintas, como também a classificação dos erros. Porém, em uma síntese final, é possível encontrar as dificuldades comuns aos dois grupos de estudantes e, a partir delas, tecer considerações com base na literatura revisada.

Para a análise dos dados, em ambos os casos, foi empregada a metodologia de análise do conteúdo das respostas, apresentada em Cury (2007). Essa abordagem é baseada na análise de conteúdo, segundo as etapas indicadas em Bardin (1979): pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Na primeira fase, as respostas coletadas são organizadas, para escaneamento ou digitação, conforme a possibilidade. Para cada questão, as respostas formam, então, o *corpus* sobre o qual os investigadores se debruçam para fazer a análise. A seguir, as respostas são corrigidas, para analisar, quantitativamente, o número de acertos totais ou parciais, de erros ou de questões em branco.

A fase de exploração do material envolve o processo de unitarização e classificação das respostas, em que o material é lido mais uma vez, para definir as categorias de erro. Nas duas pesquisas aqui mencionadas, os critérios de classificação foram determinados a partir do próprio material, com o agrupamento das respostas semelhantes.

Já na fase de tratamento dos resultados, as categorias de respostas são descritas por meio de quadros, tabelas de distribuição de frequência ou com a produção de um texto-síntese, que permita a compreensão do significado da classe, em geral com o apoio de exemplos retirados do próprio *corpus*.

A partir da classificação das respostas e da elaboração dos textos-síntese, os erros são, então, reagrupados, em um refinamento da análise, para posterior diálogo com autores que têm pesquisado dificuldades de alunos nos mesmos conteúdos.

As Questões Analisadas e os Erros Detectados

As questões em comum nas duas investigações acima mencionadas são apresentadas a seguir, indicadas por A e B. Em ambos os casos, foram propostas questões de múltipla escolha, mas foi solicitado aos alunos, além da indicação de uma alternativa de resposta, o desenvolvimento da solução, para posterior análise.

A) O valor de dois carros de mesmo preço, adicionado ao de uma moto, soma R$41.000,00. No entanto, o valor de duas dessas motos, adicionado ao de um carro do mesmo tipo, é de R$28.000,00. A diferença entre o valor do carro e o da moto, em reais, é:

a) 5.000 d) 23.000

b) 13.000 e) 41.000

c) 18.000

Para obter o resultado correto, encontrado na alternativa “b”, espera-se que o aluno demonstre ter conhecimento sobre: 1) modelagem do problema por meio de um sistema de equações lineares e sua resolução; 2) operações básicas com expressões algébricas ou numéricas.

B) Se $\boldsymbol{x \neq 2}$ e $\boldsymbol{x \neq 0}$ então a expressão $\dfrac{\boldsymbol{x^3 + x^2 - 6x}}{\boldsymbol{8x^2 - 16x}}$ pode ser escrita como:

a) $\boldsymbol{x+3}$ b) $\dfrac{\boldsymbol{x+3}}{\boldsymbol{8}}$ c) $\boldsymbol{8x}$ d) $\dfrac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{x+3}}$ e) 16

Neste caso, para obter a solução correta, apresentada também na alternativa “b”, espera-se que o aluno demonstre ter algum conhecimento sobre: 1) fatoração de expressões algébricas;

2) simplificação de expressões algébricas; 3) resolução de equação quadrática; 4) divisão de polinômios.

Vemos, então, que ambas as questões aqui analisadas versam sobre conteúdos de Álgebra do Ensino Fundamental e, para resolvê-la, o aluno deve mobilizar conhecimentos e habilidades indicadas por descritores da Matriz de Referência de Matemática para a 8ª série (BRASIL, 2005).

Na primeira pesquisa, com os 368 calouros de disciplinas matemáticas, a questão A foi a que teve maior número de acertos, sendo que 63% dos alunos assinalaram a opção correta na grade. No entanto, para a análise qualitativa apenas foram contadas as respostas dos 138 estudantes que mostraram o desenvolvimento da solução. (CURY; BISOGNIN, 2009).

As respostas que não estão totalmente corretas foram classificadas em três categorias, que indicamos por α, β e γ. Na classe α, foram inseridas aquelas em que o estudante empregou corretamente um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas para modelar o problema, soube resolvê-lo, mas errou alguns detalhes na resposta. Como exemplo, citamos a resolução de um aluno que, obtendo, pelo método de substituição, a equação $-3y = 41 - 56$, errou o cálculo da diferença e obteve $3y = 14$, concluindo, assim, com valores incorretos para as incógnitas.

Na categoria β, foram inseridas as soluções em que o estudante compreendeu que o problema poderia ser resolvido por meio de um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, corretamente indicadas, mas errou ao resolvê-lo. Nesse caso, foram analisados os erros cometidos. O primeiro tipo de erro consiste em indicar apenas o sistema de equações, não o resolvendo ou não sabendo isolar uma das incógnitas. Um segundo erro, bastante frequente, evidencia dificuldades no transformismo algébrico, especialmente nas multiplicações e nas adições de termos semelhantes. Finalmente, observamos o erro que consiste em resolver por tentativa o sistema.

Como exemplo, reproduzimos a resposta de um aluno[2], em que notamos que ele não sabe operar com termos semelhantes.

$$\begin{array}{ll} 2c + 1m = 41.000 \ (2) & \qquad 4c + 2m = 82.000 \\ 2m + 1c = 28.000 & \qquad \underline{2m + 1c = 28.000} \\ & \qquad 5c = 110.000 \end{array}$$

Finalmente, a categoria γ é formada por aquelas soluções em que o aluno não apresentou estratégia para modelar o problema.

[2] Optamos por digitar as respostas, ao invés de escaneá-las, para torná-las legíveis.

Na pesquisa que contou com os 31 alunos de cursos superiores de uma Instituição Federal do Paraná, 27 deles apresentaram desenvolvimento da solução. Os erros detectados foram classificados em quatro categorias, a seguir indicadas:

Erro I: o aluno não soube indicar o sistema de equações lineares ou não soube resolvê-lo. Como exemplo, temos a resposta abaixo, em que o estudante, tendo obtido um valor numérico, já assinalou a alternativa "b":

$$\begin{array}{l} 2c + 1m = 41.000,00 \\ 1c + 2m = 28.000,00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{3}{4}{}^{1}1000,00 \\ -\,28000,00 \\ \hline 13000,00 \end{array}$$

Erro II: o aluno não fez referências às incógnitas, utilizando apenas os valores numéricos, em adições ou subtrações, como é o caso do exemplo abaixo:

$$\begin{array}{lll} 2+1 = 41000,00 & & \\ 41.000 & 13.000,00 & 15.000,00 \\ \underline{28.000\quad} & 13.000,00 & \\ 13000,00 & & \end{array}$$

Erro III: o aluno apresentou dificuldades em relação aos conceitos das operações numéricas ou algébricas básicas ou às suas propriedades. Como exemplo, citamos:

$$\begin{cases} 2c + 1m = 41.000 \\ 2m + 1c = 28.000 \end{cases}$$

$$c = \frac{28.000}{2m}$$

Erro IV: o aluno adotou, como estratégia de resolução, solucionar o problema por tentativa.

Comparando as duas classificações, vemos que os alunos parecem ter duas grandes dificuldades: a) identificam o sistema de equações que modela o problema, mas não conseguem resolvê-lo, por falta de habilidades algébricas; b) não compreendem que o problema pode ser resolvido por um sistema de equações lineares e usam tentativas de adequar os valores numéricos às alternativas de resposta.

A questão B, na pesquisa realizada com 368 alunos de disciplinas matemáticas, teve somente 25% de soluções. Sintetizando a categorização (CURY, 2006), apresentamos em quatro classes as respostas total ou parcialmente erradas:

A: o aluno resolve por tentativa, usando valores numéricos para x e y. Exemplo:

$$\frac{1^3+1^2-6.1}{8.1^2-16.1}=\frac{-4}{0}$$

B: o aluno não domina as habilidades algébricas, tais como fatorar, operar com potências de x, dividir polinômios. O aluno cuja resposta está exemplificada a seguir mostra, também, dificuldade na compreensão da diferença entre equação e expressão.

$$\frac{8(x^2+x-6)}{8(x^2-2x)}; \quad x^2-2x\ ; \quad x^2=2x \quad ; \quad x^2-x=2 \quad ; \quad x=2$$

C: o aluno não reconhece a expressão como uma fração algébrica e tenta igualar os termos entre si ou igualar cada um deles a zero. Exemplo:

$$x^3+x^2-6x=8x^2-16x\ ;\ -x^3+7x^2-10x=0\ ;\ -1+7-10=0; -11+7=0\ ;\ -4=0$$

D: o aluno apresenta alguma frase para justificar uma resposta errada, como, por exemplo: “substituindo x por um número, a resposta nunca vai dar algo com x junto”.

Na pesquisa realizada com 31 estudantes da Instituição de Ensino Superior do Paraná, todos os alunos tentaram resolvê-la, mas nenhum obteve a solução correta. Os erros foram classificados em quatro categorias:

Erro I: o aluno, na tentativa de simplificar a expressão, mostrou falta de habilidades algébricas, “cancelando” incorretamente monômios do numerador com os do denominador ou somando termos não-semelhantes. Como exemplo, temos:

$$\frac{x^3+x^2-6x}{8x^2-16x}$$
$$\frac{x^3+\cancel{x^2}-6x}{\cancel{x^2}-2x}=x^2+3$$

Erro II: o aluno mostrou dificuldades em operações numéricas com os coeficientes das expressões. Na resposta abaixo exemplificada, o próprio aluno mostrou não ter entendido sua resolução, ao usar o ponto de interrogação:

$$\frac{x^3+x^2-6x}{8x^2-16x}$$
$$\frac{x^2+x-3x}{4x^2-4x}$$

?

Erro III: O aluno apresentou dificuldades em relação aos conceitos das operações algébricas básicas ou às suas propriedades. É o caso do estudante que "somou" os expoentes das potências de x e ainda cancelou equivocadamente os termos.

$$\frac{x^3 + x^2 - 6x}{8x^2 - 16x}$$
$$\frac{x^5 - 6x}{8x^2 - 16x} = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{12}$$
$$\frac{3x^3 - 6}{24}$$

Erro IV: o aluno resolveu por tentativa, substituindo x e y por valores numéricos.

Novamente, podemos considerar que as soluções erradas mostram duas grandes dificuldades dos alunos: a) falta de conhecimento de entes algébricos, como expressões ou equações; b) falta de habilidade para operar numérica ou algebricamente.

Conclusões

Voltando aos autores anteriormente citados, podemos refletir, então, sobre os dados encontrados nessas duas pesquisas, aqui parcialmente relatadas. Em uma síntese das concepções de pensamento algébrico, optamos por entender esse constructo como inter-relação entre os conhecimentos dos entes algébricos, das relações entre eles e das habilidades de manipulação algébrica.

Pelos erros detectados nas duas pesquisas e relacionados às duas questões aqui analisadas, concluímos que os alunos cujas respostas foram consideradas parcial ou totalmente erradas não têm o pensamento algébrico desenvolvido. Há problemas com o conhecimento de entes algébricos, de suas operações e propriedades. Também há dificuldades em relação às atividades transformacionais ou baseadas em regras e na capacidade de abstração e generalização, haja vista a necessidade de substituir letras por números.

Se esses alunos são calouros de cursos superiores que exigem conhecimentos de Matemática, pelo menos em algumas disciplinas, é fundamental tentar remediar os problemas detectados, caso contrário estaremos cooperando para aumentar o número de reprovações e desistências em tais cursos.

O uso dos erros como "trampolins para a aprendizagem"[3] vem sendo indicado de várias maneiras: a) partir dos erros e criar atividades nas quais o aluno seja desafiado a retomar os

[3] Expressão usada por Borasi (1985).

conteúdos nos quais apresenta dificuldades; b) usar jogos para repetir procedimentos, regras ou cálculos algébricos; c) apresentar listas de exercícios cujas soluções apresentam algum erro e solicitar aos alunos o reconhecimento da ocorrência de erro e a possibilidade de corrigir.

Nas pesquisas aqui relatadas, tivemos, como um dos objetivos, elaborar e desenvolver atividades e recursos para explorar, em sala de aula, as dificuldades dos alunos. No caso da pesquisa realizada com calouros de Instituições de Ensino Superior do Rio Grande do Sul, com o apoio de licenciandos em Matemática de uma das Instituições e a partir dos erros relacionados à simplificação de expressões algébricas, foi criado um jogo de cartas que explora essas simplificações (CURY; KONZEN, 2007).

Já o produto originado a partir dos dados da investigação realizada na Instituição Federal do Paraná consistiu de um conjunto de atividades, apresentado sob forma de CD-ROM interativo, elaborado a partir de um dos erros mais frequentes, a saber, a adição de termos não-semelhantes de uma expressão algébrica (BORTOLI, 2011).

Com esse artigo, portanto, trouxemos algumas reflexões sobre a inter-relação entre conhecimentos e habilidades de resolução de questões algébricas e sugerimos que sejam elaboradas pelos professores atividades geradas a partir da análise de erros cometidos pelos alunos ao resolverem questões de Álgebra, como forma de auxiliar os estudantes a desenvolver o pensamento algébrico.

Referências bibliográficas

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Porto: Edições 70, 1979.

BORASI, R. Using errors as springboards for the learning of mathematics; an introduction. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, v. 7, n. 3-4, p. 1-14, 1985.

BORTOLI, M. de F. **Análise de erros em matemática**: um estudo com alunos de ensino superior. 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS, 2011.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Temas e Descritores da Matriz de Referência de Matemática:** Saeb / Prova Brasil. 2005. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/basica/saeb/matrizes/topicos_8serie_mat.htm>. Acesso em: 24 jan. 2011.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

CURY, H. N. A análise de erros na construção do saber matemático. In: JORNADA REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2006, Passo Fundo. **Anais...** Passo Fundo: UPF, 2006. 1 CD-ROM.

CURY, H. N.; KONZEN, B. Uma aplicação de jogos na análise de erros em educação matemática. **REVEMAT**, v. 2.6, p. 107-117, 2007. Disponível em:

<http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12994>. Acesso em: 10 abril. 2011.

CURY, H. N.; BISOGNIN, E. Análise de soluções de um problema representado por um sistema de equações. **BOLEMA**, v. 22, n. 33, p. 1-22, 2009.

KAPUT, J. J. **A research base supporting long term algebra reform?** Texto apresentado na 17. Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1995, Columbus, Ohio. Disponível em: <http://eric.ed.gov/PDFS/ED389539.pdf >. Acesso em: 23 jan. 2011.

KIERAN, C. The core of algebra: reflections on its main activities. In: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (Eds.). **The future of the teaching and learning of algebra**: the 12th ICMI study. Dordrecht: Kluwer, 2004. p. 21-33.

KIRSHNER, D. The structural algebra option revisited. In: SUTHERLAND, R. et al. **Perspectives on school algebra**. Dordrecht: Kluwer, 2001. p. 83-98.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar...a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, v. 4, n. 1(10), mar. 1993.

LINS, R. C. The production of meaning for algebra: a perspective base on a theoretical model of semantic fields. In: SUTHERLAND, R. et al. (Ed.). **Perspectives on school algebra**. Dordrecht: Kluwer, 2001. p. 37-60.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

PONTE, J. P. da., BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular, 2009.