

## SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA: UMA EXPERIÊNCIA NA FUNDAÇÃO DE APOIO À ESCOLA TÉCNICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

### DIDACTIC SEQUENCES FOR THE TEACHING OF GEOMETRY: AN EXPERIENCE AT THE RIO DE JANEIRO STATE FOUNDATION FOR THE SUPPORT OF TECHNICAL SCHOOLS

Maria Aparecida Ribeiro da Silva\*  
Herbert Gomes Martins\*\*  
Cleonice Puggian\*\*\*

#### Resumo

Neste trabalho apresentamos os resultados de uma pesquisa qualitativa sobre a utilização de sequências didáticas para o ensino de geometrias finitas, investigando como estas sequências podem contribuir na construção de conceitos geométricos junto a alunos do ensino médio. A pesquisa fundamenta-se nas teorias das didáticas específicas, nos pressupostos da aprendizagem significativa, numa abordagem qualitativa com uso da metodologia conhecida como Engenharia Didática. Dados foram coletados durante uma experiência docente planejada para organizar os conteúdos geométricos de forma lógica e contextualizada a fim de introduzir uma demonstração. Apresentamos situações didáticas com a intenção de motivar e aprimorar o desempenho do aprendiz em relação às leituras geométricas, desenvolver o raciocínio lógico-matemático e despertar diferentes caminhos do pensamento dedutivo. O experimento foi realizado durante os segundo e terceiro bimestres letivos de 2011 e dele participaram alunos do primeiro ano do ensino médio técnico. A análise dos dados nos permite concluir que através da sequência didática proposta os alunos desenvolveram a capacidade de analisar os espaços geométricos com quantidade finita de pontos e linhas, superando obstáculos na verificação dos axiomas apresentados. Concluímos que o uso de sequências didáticas constitui uma estratégia adequada e inovadora para o ensino de geometria no ensino médio.

**Palavras-chave:** Sequências Didáticas. Geometria Finita. Ensino Médio. Escola Técnica.

#### Abstract

In this paper we present the results of a qualitative study on the use of didactic sequences for the teaching of finite geometries, investigating how these sequences can contribute to the construction of geometric concepts among high school students. The research was based on theories of teaching, specific didactics and meaningful learning. It adopted a qualitative approach using a methodology known as Didactic Engineering. Data was collected during a teaching experience designed to organize the geometric content logically and contextualized, introducing demonstrations. We presented teaching situations with the intention to motivate and improve the performance of the learner in relation to geometric readings, developing logical-mathematical reasoning and awakening different ways of deductive thinking. The experiment was conducted during the second and third academic bimesters of 2011 and was attended by students of the first year of technical high school. Data analysis allowed us to conclude that through the proposed teaching sequence the students developed the ability to analyze geometric spaces with finite number of points and lines, overcoming obstacles in verifying the axioms presented. We concluded that the use of didactic sequences constitutes an appropriate strategy and an innovative way to teach geometry in high school.

**Keywords:** Teaching Sequences. Finite Geometry. High School. Technical School.

---

\* Mestre em Ensino das Ciências na Educação Básica, UNIGRANRIO. Professora de Matemática do ensino fundamental e médio.

\*\* Doutor em Engenharia de Produção COPPE/URFJ. Docente do Mestrado Profissional em Ensino das Ciências na Educação Básica, UNIGRANRIO.

\*\*\* Doutora em Educação, Universidade de Cambridge. Docente do Mestrado Profissional em Ensino das Ciências na Educação Básica, UNIGRANRIO. Docente da Faculdade de Formação de Professores, UERJ.

## Introdução

A Fundação de Apoio à Escola Técnica (FAETEC), vinculada à Secretaria de Estado de Ciência e Tecnologia (SECT), oferece educação profissional gratuita, em diversos níveis de ensino, à população do Estado do Rio de Janeiro. Criada em 10 de junho de 1997, a Fundação reúne Escolas Técnicas Estaduais, Unidades de Educação Infantil, Ensino Fundamental, Industrial e Comercial, Institutos Superiores de Educação e Tecnologia e Centros de Educação Tecnológica e Profissionalizante.

A pesquisa a que se refere este artigo foi realizada na Unidade ETEAB (Escola Técnica Adolpho Bloch) como parte de uma dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática e Ciências e procurou promover a aprendizagem da geometria em uma turma de trinta alunos com idades entre 14 e 25 anos através de uma experimentação didática.

A experimentação didática justifica-se, por um lado, pela constatação de que as abordagens convencionais baseadas em exposição e fixação de conteúdos não davam conta das necessidades e expectativas dos alunos. De outro, pela necessidade de desenvolver com eles leituras geométricas diversificadas e oferecer atividades que proporcionassem a análise das propriedades, por meio da resolução de problemas. Acredita-se que este procedimento favorece o desenvolvimento de competências relacionadas à capacidade de deduzir, justificar, argumentar e demonstrar relações e propriedades da matemática.

Pretende-se com isso que o aluno que conseguir ler, perceber, analisar e elaborar um raciocínio construirá a sua aprendizagem, com lógica e criatividade.

No entanto, é sabido que o ensino de matemática vem atravessando uma fase de insucesso demonstrado através dos indicadores públicos de desempenho extraídos dos vários exames a que os alunos são submetidos. Acreditamos que a inaptidão matemática é um traço comprometedor no letramento científico das novas gerações que necessitam inserir-se em novas profissões e desafios da inovação tecnológica e do conhecimento que surgem a cada dia.

Segundo Ortigão (2010) os resultados do SAEB apontam para o baixo desenvolvimento das habilidades matemáticas dos alunos brasileiros. A autora ressalta que os resultados do exame identificaram nos participantes um estágio crítico na escala de habilidades em matemática em todos os ciclos de avaliação.

Nesse sentido, os parâmetros curriculares (PCNEM) preconizam uma aprendizagem de matemática que ultrapasse os limites da informação: “Não basta rever a forma ou a metodologia de ensino, e manter o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os

exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação” (BRASIL, 1999, p. 255).

Este artigo é baseado em pesquisa de mestrado profissional e tem como problemática a promoção do ensino de geometria no ensino médio através de geometrias finitas com o uso de sequências didáticas. Tem como hipótese(s) ou pressupostos(s), que o ensino de geometria desenvolvido a partir de conjuntos com número finito de pontos ajudará a desenvolver o pensamento geométrico e a construção de argumentações e justificativas.

O objetivo geral é identificar os efeitos na aprendizagem proporcionados pela adoção do modelo de ensino da geometria baseado em verificação de propriedades através de situações que envolvem problemas com um número finito de pontos e, nesse sentido, demonstrar como as sequências didáticas podem ser utilizadas como estratégia adequada para o ensino deste conteúdo.

### **Uma olhar da Didática Geral à Didática Específica**

As geometrias finitas se inserem num campo disciplinar chamado de matemática discreta e seu uso deve ser destacado no ensino básico, haja vista que, em momento de grande desenvolvimento das tecnologias e das ciências da computação, podem auxiliar na compreensão de fatos científicos básicos. Sendo assim, a matemática discreta “provê um conjunto de técnicas para modelar problemas na ciência da computação” (LOUREIRO, 2012), pois o discreto e o contínuo estão ligados respectivamente ao conceito de analógico e digital nas construções dos algoritmos e outros conteúdos necessários aos estudos da computação.

Entretanto, a concepção tradicional de didática pode não ser a mais adequada para a consecução dos resultados de aprendizagem esperados para o caso em análise. O debate sobre didática entre profissionais da educação vem se enriquecendo muito. A partir das discussões em grupos diversificados podemos perceber a variação de olhares sobre um mesmo assunto, visões que se complementam e podem auxiliar na preparação dos planos e estratégias das aulas.

Segundo Libâneo (2010), as crianças e jovens vão à escola para aprender e internalizar os meios cognitivos de compreender o mundo e transformá-lo. Para isso é necessário estimular a capacidade de raciocínio e julgamento, melhorar a capacidade reflexiva e desenvolver competências que ajudem a pensar. Especificamente, na matemática, baseados nas orientações do PCNEM (1998), o currículo deve contemplar conteúdos e estratégias de aprendizagem que capacitem o aluno para a vida em sociedade.

Bittencourt e Amade-Escot (2004) apresentam estudo que tem como objeto central o funcionamento do sistema didático e das práticas docentes efetivas, evidenciando a necessidade de se retomar as didáticas específicas. É oportuna a afirmação de Vergnaud: “A didática de uma disciplina estuda os processos de transmissão e aquisição relativos ao domínio específico dessa disciplina, ou das ciências próximas com as quais ela interage” (1985 apud D’AMORE, 2007, p. 32).

Os estudos de didática específica para o ensino de matemática surgem no Brasil a partir da década de 1920, com movimento da Escola Nova. Com ele vieram os primeiros “educadores matemáticos”, que criaram manuais de orientação didática e pedagógica de matemática. Everardo Backheuser se dedicou ao ensino da escola primária e Euclides Roxo ao ensino secundário e às reformas curriculares. Nas décadas de 1940 e 1950, Malba Tahan, Cecil Thiré, Ary Quintella, Jairo Bezerra e outros, interessados no movimento de mudança, começaram a escrever livros e a indicar orientações de didática e de pedagogia para auxílio ao professor durante a prática com seus alunos (FIORENTINI; LORENZATO, 2009).

Após 1950 houve um grande impulso a partir dos congressos sobre ensino de matemática e da criação dos centros regionais de pesquisas educacionais, mas os estudos se preocupavam com os cálculos e com a quantidade de conteúdo deixando de lado a criação de novos resultados.

Seguindo ainda Fiorentini e Lorenzato (2009), com o surgimento das licenciaturas em matemática, dos colégios de aplicação e da disciplina prática de ensino e do estágio supervisionado, seguindo parecer do Ministério da Educação e Cultura, de 1960, surgiram nas universidades especialistas em didática e metodologia de ensino da matemática, o que marcaria o início do movimento Educação Matemática. Ubiratan D’Ambrosio coordenava alguns programas ligados às faculdades de educação, e pretendia priorizar a dimensão didáticas e metodológica da Educação Matemática.

Segundo Kilpatrick (1994 apud FIORENTINI; LORENZATO, 2009), a tendência nesse momento, entre outras, é que à medida que surgem novas abordagens relativas a conteúdo e prática, pode-se ensinar-aprender como desenvolver o assunto na escola e que a resolução de problemas, suas respostas corretas ou incorretas, assim como os esquemas e estruturas cognitivas devem continuar sendo objeto de pesquisa.

A aprendizagem da geometria é tanto necessária quanto deve ser viável o seu ensino e, nesse sentido, deve-se repensar a didática específica desse campo disciplinar. Apesar de tratarem de disciplinas diferentes, as didáticas específicas consideram os saberes disciplinares como elemento fundamental na compreensão do fenômeno “ensino”, sendo, em nosso entendimento,

o caminho mais propício para desenvolver competências matemáticas no aluno. Neste caso específico, focamos a análise no desenvolvimento das capacidade de reconhecer postulados e axiomas que são a base do conhecimento em geometria.

### **Um olhar da Geometria às Geometrias não euclidianas**

A origem da Geometria (do grego: medir a terra) está ligada a algumas práticas do cotidiano relacionadas ao plantio, construções e movimento dos astros, sendo usada para cálculo de áreas, superfícies e volumes. Seu estudo iniciou-se na antiguidade, nas civilizações egípcias e babilônicas, por volta do século XX a.C, numa fase intuitiva e não-sistemática. Por volta de 500 a.C., as primeiras academias foram fundadas na Grécia e a busca por conhecimentos sobre geometria aumentava. A partir de Tales de Mileto (640-546 a.C.) e Pitágoras (580-500 a.C.) surgem as primeiras tentativas de deduzir os fatos geométricos apoiada em proposições gerais. O aprimoramento deu-se com as excelentes obras de Eudoxo e Arquimedes, porém foi com Euclides (325-265 a.C.) que a geometria desenvolveu-se como ciência dedutiva.

Para Euclides a geometria era uma ciência dedutiva que operava a partir de certas hipóteses básicas: os axiomas. Os axiomas foram apresentados em dois grupos: as noções comuns e os postulados. A distinção entre esses grupos não é muito clara, mas noções comuns seriam consideradas hipóteses aceitáveis por todas as ciências e postulados seriam hipóteses próprias da geometria.

Distinção entre axiomas e postulados.

<b>Axiomas ou Noções comuns</b>	<b>Postulados</b>
<ul style="list-style-type: none"><li>• Coisas iguais à mesma coisa são iguais entre si.</li><li>• Adicionando-se iguais a iguais, as somas são iguais.</li><li>• Subtraindo-se iguais de iguais, as diferenças são iguais.</li><li>• Coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si.</li><li>• O todo é maior do que a parte.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.</li><li>• É possível prolongar uma reta finita indefinidamente em linha reta.</li><li>• É possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.</li><li>• Todos os ângulos retos são iguais entre si.</li><li>• Se uma reta intersecta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos.</li></ul>

A partir do quinto postulado foi criado o primeiro e mais duradouro modelo para o espaço físico, a Geometria Euclidiana, regida pelos postulados. Esse modelo possuía, aparentemente, um encadeamento lógico perfeito.

Kallef (2004) faz uma interessante articulação entre a evolução do conhecimento geométrico e o desenvolvimento teórico da Matemática:

Tradicionalmente, os conhecimentos geométricos se restringiam aos saberes – relações lógicas e construções de traçados constitutivos de desenhos - advindos da geometria estabelecida na Grécia há cerca de 2700 anos e conhecida hoje como Geometria Euclidiana. Estes conhecimentos evoluíram, tanto em decorrência do surgimento de diversas concepções geométricas inovadoras, alternativas à Euclidiana: as Geometrias não-Euclidianas, quanto como consequência de reconsiderações conceituais surgidas ao longo do século XX, decorrentes dos novos conhecimentos advindos do desenvolvimento teórico da Matemática e da ciência da computação. (KALEFF, 2004, p.1).

O advento de novos desafios matemáticos como a informática, a computação gráfica e os sistemas numéricos automatizados indicam que a chamada Geometria Euclidiana não deve ser considerada como a única visão de geometria real. É necessário superar esse paradigma “... para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico” (BRASIL, 1998, p.24).

O surgimento de geometrias não euclidianas se deve ao fato das tentativas e de provar o postulado das paralelas a partir dos restantes nove “axiomas” e “postulados” ou até mesmo sua negação. O método axiomático consiste em fazer uma coleção completa de proposições e conceitos básicos de onde derivarão as outras proposições e conceitos, por dedução e por definição. Um sistema de axiomas é constituído de quatro partes principais: termos indefinidos, termos definidos, axiomas ou postulados e teoremas. Um sistema de axiomas deve ser consistente, independente e completo:

- Consistência: quando numa proposição não podemos provar a afirmação e a negação.
- Independência: nenhum axioma é consequência de alguma combinação dos demais.
- Completude: Para toda proposição feita dentro da teoria em questão, pode ser provada ou ela ou sua negação.

As geometrias finitas foram desenvolvidas durante a tentativa de provar as propriedades de consistência, independência e completude de um sistema axiomático. Os matemáticos queriam modelos que fossem válidos para axiomas específicos. Os modelos encontrados frequentemente tinham um número finito de pontos e linhas, o que contribuiu para a denominação desse ramo da

geometria. Para fins desse estudo, as geometrias finitas serviram para justificar os conhecimentos geométricos promovendo o ensino crítico e criativo de matemática, como será visto mais adiante.

### **Procedimentos metodológicos e análise dos resultados obtidos**

A experimentação abordada neste artigo consistiu em atividades com quantidade finita de pontos com o objetivo de facilitar a interpretação do texto matemático, a experimentação das propriedades propostas, o relacionamento entre elas, desenvolvendo a habilidade da demonstração. Usamos a mesma prática de Euclides na organização de seu manual “Os Elementos”, demonstrando, a partir das noções comuns, cada um dos novos postulados, que serviram para justificar os seguintes.

A pesquisa foi predominantemente qualitativa e optamos pela Engenharia Didática como metodologia, realizando uma pré-testagem baseada em van Hiele.

O modelo de van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio em geometria foi criado por Pierre van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geoldof, tendo por base as dificuldades apresentadas por seus alunos no curso secundário na Holanda. O modelo sugere que os alunos progredem segundo uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, enquanto eles aprendem geometria. (NASSER; SANT’ANNA, 2000, p.8).

A aplicação desse modelo ratificou a hipótese e confirmou as observações sobre as carências no ensino de geometria na educação básica e a necessidade de apresentar práticas com atividades de experimentação, procurando chegar ao rigor matemático, necessário à aprendizagem e ao desenvolvimento das competências matemáticas.

Através de um plano didático de trabalho, foi determinada a unidade didática a se desenvolver, as motivações, as atividades e uma avaliação centrada nos objetivos iniciais da proposta que organizaram a nossa prática como professores e pesquisadores e também a aprendizagem do aluno. Foram realizadas intervenções e discussões com o objetivo de desenvolver o raciocínio e sustentar a idéia de trabalhar com as habilidades de justificativa e argumentação, tanto oralmente como por escrito.

Conforme as atividades planejadas foram realizadas, percebemos que aumentava o interesse do grupo em fazer a atividade seguinte. As interpretações realizadas com poucos pontos e poucas linhas foram enriquecedoras. Os participantes da pesquisa puderam criar uma terminologia particular que foi amplamente usada e discutida nos grupos de trabalho.

Em cada experimentação fomentamos a prática do registro. Muitos sentiam a necessidade de falar, perguntar primeiro e depois eram incentivados a escrever seus resultados. Usaram a

representação pelos desenhos, muitas vezes sem aparecer esta ordem nos enunciados, demonstrando a necessidade de algum registro gráfico para organizar o raciocínio geométrico, sempre orientados para apresentar as conclusões e justificativa através de registros escritos.

Na última atividade, cujo objetivo era a percepção da compreensão de um texto de demonstração, percebeu-se que os participantes da pesquisa foram capazes de desenhar as etapas com suas próprias habilidades, demonstrando que a análise realizada através dos espaços geométricos anteriores foram úteis neste desenvolvimento.

Assim, consideramos alcançado o primeiro dos nossos objetivos, que era apresentar atividades para desenvolver a geometria através da análise de espaços geométricos definidos com quantidade finita de pontos. As atividades foram vivenciadas em três encontros de noventa minutos e os participantes puderam experimentar cada situação, respeitados os tempo individuais e registrados os resultados obtidos.

Desenvolver um modelo de sequência didática para promover o ensino de matemática e produzir significado para os sujeitos da pesquisa foi o nosso segundo objetivo. A Sequência Didática foi desenvolvida na sua totalidade. Seguimos todos os passos previstos e na avaliação percebemos que os sujeitos da pesquisa aproveitaram todos os momentos destinados a pensar em conjuntos discretos e, principalmente, conseguiram fazer uma reversibilidade em suas ações, lendo e experimentando, desenhando e registrando, interpretando os registros e fazendo a representação através de escrita gráfica.

Como principais conclusões decorrentes dos experimentos podemos destacar que:

- o progresso geométrico do aluno se dá através de atividades propostas adequadas e ordenadas pelo professor;
- o progresso geométrico depende mais da aprendizagem sólida de conceitos do que da idade e da maturidade do aprendiz. Podemos evidenciar também que pela observação de Van Hiele cada nível se caracteriza por relações entre objetos de estudo e a linguagem própria. Para que a aprendizagem se efetive é necessário observar o nível de raciocínio da turma para que se efetive a compreensão.

### **Considerações finais**

A estratégia de ensino baseada em geometrias finitas instigou o aprendiz na análise de problemas que podem desconstruir a idéia de que só existem figuras e medidas da geometria euclidiana, que as distâncias devem ser sempre calculadas no plano, diferente da superfície quase esférica em que vivemos, e que iniciar um estudo analisando geometrias diferentes enriqueceu



sobremaneira o desenvolvimento das habilidades matemáticas e geométricas do estudante. Concluimos que o uso de sequências didáticas mostrou-se uma estratégia adequada e inovadora para o ensino de geometria no ensino médio. Neste sentido, a didática específica ganha força por proporcionar subsídios epistemológicos para romper com as armadilhas da generalização e conferir ao ensino de matemática novas práticas pedagógicas.

A aplicação da sequência didática com atividades de geometria finita facilitou a identificação das propriedades, auxiliando os alunos a analisar cada ponto e cada linha envolvida na experimentação, favorecendo a percepção e dando potencial liberdade de ação ao professor para verificar e dirimir obstáculos epistemológicos relativos à identificação, sistematização e construção de conceitos em geometria.

### Referências bibliográficas

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. v.3, p.62-77, 1998.

BITTENCOURT, Jane; AMADE-ESCOT, Chantal. Didática e Práticas Docentes: uma Abordagem Comparatista. In: **Anais da 27ª Reunião Anual ANPED**. Caxambu, MG. 21 a 24 de novembro de 2004.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM) – Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação, 1998.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de Didática da Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, A. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3.ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

KALEFF, A. M.; NASCIMENTO, R. S. Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi. **Boletim Gepem**, Rio de Janeiro, n. 44, p. 11-42, dez. 2004.

LIBÂNIO, José Carlos. O ensino de didática, de metodologias específicas e de conteúdos do ensino fundamental: o caso dos cursos de pedagogia no estado de Goiás. Painel. In: **Anais XV ENDIPE**, Belo Horizonte, 2010.

LOUREIRO, A. F. **Matemática Discreta: Introdução**. Belo Horizonte: UFMG, 2012. Disponível em: <[http://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md\\_0Introducao.pdf](http://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_0Introducao.pdf)> Acesso em: 18 fev 2012.

NASSER, Lilian; SANT'ANNA, Neide P. (coords.). **Geometria segundo a teoria de van Hiele**. Rio de Janeiro: Projeto Fundação IM/UFRJ, 2000.

ORTIGÃO, M. I. R. O ensino de Matemática e as avaliações sistêmicas: o desafio de apresentar os resultados a professores. In: CUNHA, A. F. **Convergências e tensões no campo da formação e do trabalho docente**. Belo Horizonte: Autêntica, 2010, p. 630-646.