

VISUALIZAÇÃO NO ENSINO DE INTEGRAIS COM O USO DO GEOGEBRA: O CASO DAS COORDENADAS POLARES

VIEWING IN THE TEACHING OF INTEGRALS WITH THE USE OF GEOGEBRA: THE CASE OF POLAR COORDENATES

Francisco Regis Vieira Alves ¹

Resumo

A noção de integral definida proporciona inúmeras aplicações. Seu uso na determinação de áreas e comprimentos de curvas, descritas em coordenadas polares constitui uma delas. Assim, discutem-se neste artigo determinadas situações-problema e, com o uso do *software Geogebra*, certos aspectos são evidenciados e explorados, sobretudo, os que dizem respeito à habilidade de visualização e a percepção de propriedades extraídas de vários gráficos construídos com o *software*. A dinamicidade das construções produzidas com o *software* contrasta com as figuras estáticas e de feitiço pouco trivial, apresentadas pelos autores de compêndios de Cálculo. Destarte, contrapondo elementos do passado histórico, em que a mudança de coordenadas cartesianas para polares envolveu alguma mudança de perspectiva dos matemáticos; e, com situações problema específicas que promovem ricas ligações conceituais com a integral definida, busca-se indicar vias diferenciadas para a transmissão deste saber, rompendo rituais reducionistas de ensino.

Palavras-chave: Coordenadas polares, Geogebra, Ensino, Integral Dupla

Abstract

The notion of definite integral provide numerous applications. It's use in determining areas and lengths of curves, described in polar coordinates is one of them. Thus, this article discusses certain problems situations, and using the software Geogebra, certains aspects are highlighted and explored, especially those relating to the ability of visualization and perception of properties extracted from multiple graphs constructed with the software. The dynamics of constructions produced with software contrasts with the static figures and cutout bit trivial, presented by the authors of textbooks of calculus. Thus, opposing elements of the historical past, in which the change of cartesian coordinates to polar involved some change in perspective of mathematicians, and with specific problem situations that promote rich conceptual links with the definite integral, we seek to indicate different pathways for the transmission this knowledge, breaking reductionist rituals in the teaching.

Key-words: Polar coordinates, Geogebra, Teaching, Double Integral.

¹ Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará

1. Introdução

A noção de integral definida detém papel importante no estudo do Cálculo. No rol de suas possibilidades de aplicações, assinalamos o cálculo de áreas por meio de coordenadas polares. Semelhantemente ao que transcorre com a integral descrita em somas de Riemann, nas coordenadas cartesianas, para a descrição de uma integral definida em coordenadas polares, tomamos uma partição $\wp \subset [a, b]$ do intervalo, em que os números $\theta = a$ e $\theta = b$ indicam os raios de uma região.

Pouco mais adiante, encontramos nos compêndios de Cálculo a descrição da área de uma região $\Re \subset \mathbb{R}^2$ descrita por $A = 1/2 \int_a^b [f(\theta)]^2 d\theta$ (*) ou ainda $A = 1/2 \int_a^b \rho^2 d\theta$, em que $\rho = f(\theta)$. Outra aplicação relevante é a descrição do comprimento de arco de uma curva polar $\rho = f(\theta)$, em que f é contínua e positiva na região pretendida. Nesse último caso, referir-nos-emos ao símbolo $L_{a,b}$ como o comprimento da curva designado pela integral definida

$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$ (**). De modo sistemático, no estudo de integrais envolvendo a aplicação da integral definida, por intermédio de coordenadas polares, de modo *standard*, efetuamos:

- a) Identificação e visualização da região de interesse;
- b) descrição dos pontos de intersecção das curvas (caso haja mais de uma curva);
- c) descrição da integral definida em termos de (*) ou (**);
- d) avaliação final da integral definida e a obtenção de uma primitiva.

Dar-se-á, ao longo do texto, ênfase maior na 1ª e 3ª alíneas há pouco indicadas. Não obstante, buscaremos tal objetivo com recurso ao *software Geogebra*. Não apoiamos nosso discurso na pretensão de apresentar situações que envolvam ineditismo, não obstante, o uso do *software* indicará formas diferenciadas de interpretação e a exigência de habilidades cognitivas negligenciadas, quando restringimos nossa mediação aos instrumentos lápis/papel. Na próxima seção, discutiremos determinados aspectos, relacionados com a noção de integral. Sua relevância no Cálculo é confirmada pela atenção dispensada por inúmeros matemáticos, no transcorrer dos séculos XVII, XVIII, XIX e XX (GRATTAN-GUINNESS, 1980).

2. Livros didáticos e um pouco de história

A integral definida foi um objeto matemático que tornou exequível diversas aplicações e pontos de vistas diferenciados. Desde os tempos mais remotos, até hoje, deparamos em sala de aula, sobretudo no *locus* acadêmico, suas possibilidades de aplicação. No caso de aplicações de integral definida para o cálculo de áreas, registramos o esforço dos autores de livros no sentido de descrevê-la, com o intuito de determinação de áreas. Neste sentido, na figura 1, os autores Ayres & Mendelson (1990) significam e descrevem algumas integrais correspondentes às áreas limitadas entre curvas obtidas em coordenadas polares.

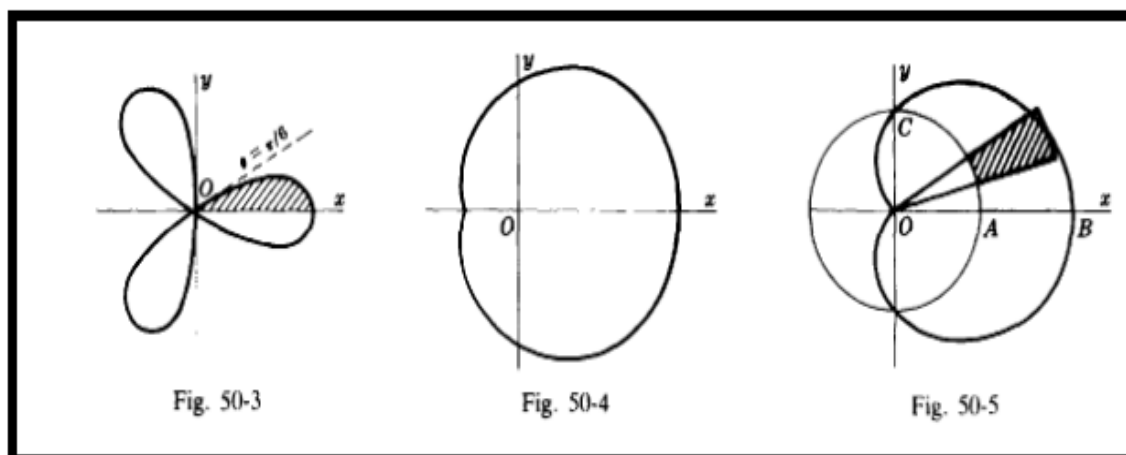


Figura 1. Curvas descritas em coordenadas polares por Ayres & Mendelson (1990, p. 233)

Indubitavelmente, um caráter que registramos na figura 1 refere-se a viés estático dos desenhos acima que detém a possibilidade de proporcionar a mobilização de um raciocínio heurístico, no sentido de Polya (1973). Um empenho similar é observado em Guidorizzi (2010). Neste sentido, a tarefa que envolve a determinação da área limitada entre as curvas $\rho = 3\cos(\theta)$ e $\rho = 1 + \cos(\theta)$ é abordada por etapas, explicadas por meio de alguns desenhos que divisamos logo abaixo na figura 2.

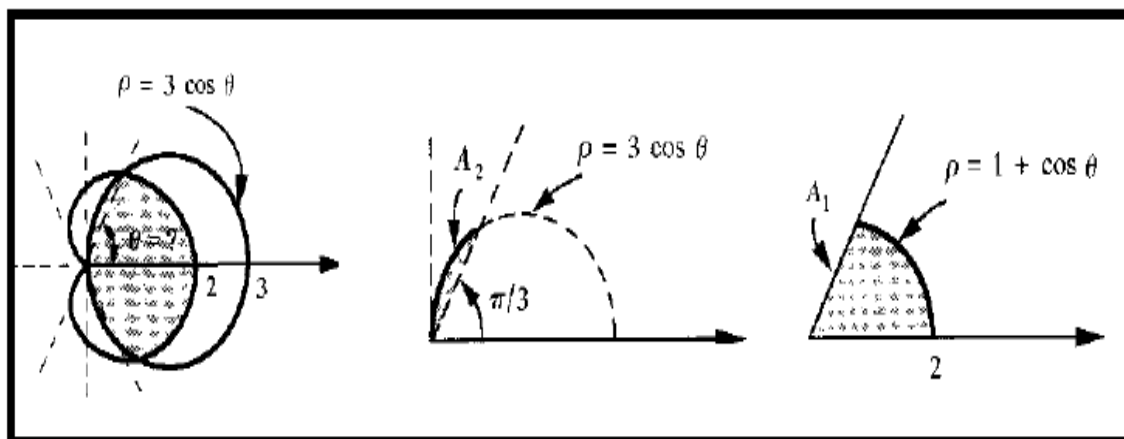


Figura 2. Descrição do cálculo de área em coordenadas polares (GUIDORIZZI, 2010, p. 428-429)

Encontramos livros de História da Matemática (BOURBAKI, 1984; EDWARDS, 1979; HAIRER & WANNER, 2008; SIMMONS, 1992) que demarcam uma mudança de visão e de significados, quando determinados problemas seculares passaram a ser atacados com a substituição das coordenadas cartesianas por uma outra maneira de localização no plano.

Hodiernamente, falamos de uma aplicação $P: \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{pmatrix}$, onde ρ mede a distância

e o ângulo θ medido em radianos. No século XVIII, matemáticos como Guido Grandi manifestaram interesse em problemas que detinha uma descrição em coordenadas polares (STILLWELL, 1989). Na figura 7-I abaixo (ao lado esquerdo), por exemplo, com equações descritas por $\rho = a \cdot \sin(n\theta)$ e $\rho = a \cdot \cos(n\theta)$, com $n \in \mathbb{Z}$, temos as rosas de G. Grandi.

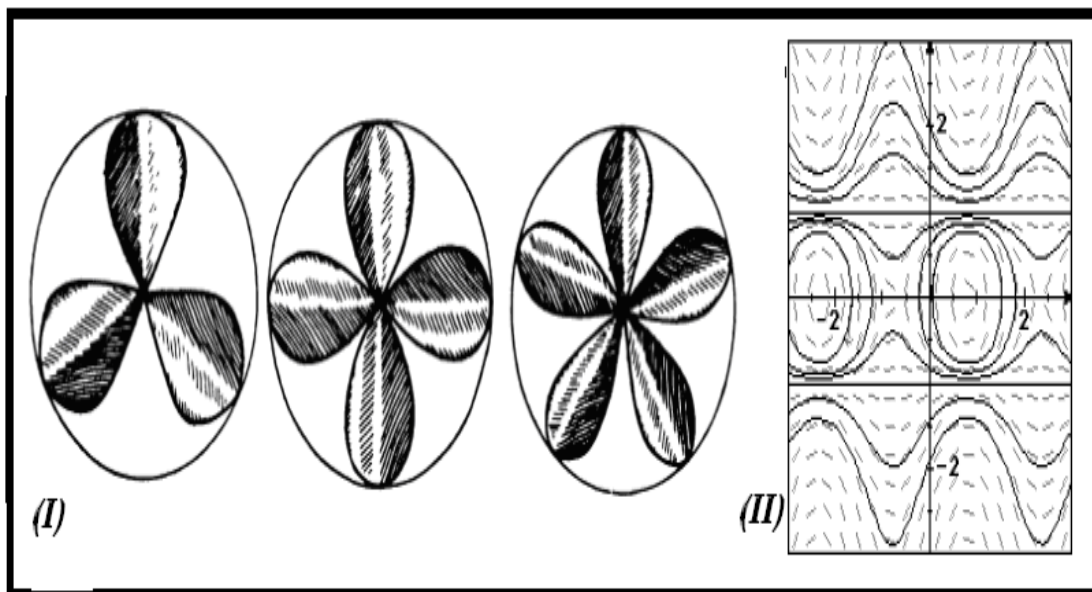


Figura 3. (I) Stillwell (1989, p. 68) comenta as figuras referentes as *rosas de Grandi*, descritas em 1723 por G. Grandi. (II) Tall (1991, p. 7) discute o comportamento gráfico de um EDO.

A noção de coordenadas polares é comentada por Kline (1980, p. 343) por servir de um modelo que deixa inconclusivo alguns dos teoremas e axiomas canônicos da Geometria Euclidiana. Sua constatação indica um caráter de pouca imediatividade e trivialidade, quando passamos de coordenadas cartesianas para coordenadas polares.

Registramos forte debate e um criticismo vigoroso no ensino do Cálculo há décadas (THOMPSON, 1994). Neste sentido, destacamos os artigos de Tall (1991a; 1991b) que, já nos anos de 1990, criticava e sugeria o importante papel da tecnologia, como instrumento de superação de certos entraves, chamados, à época, de obstáculos epistemológicos e cognitivos (TALL, 1991a, p. 3). Tall (1991a, p. 4) apontava a relevância de atividades de cunho numérico e outras, envolvendo programação adequada, com o intuito de proporcionar que o “estudante pense sobre o processo envolvido”. Discutia, no mesmo artigo, como a linguagem de programação BASIC, com certos comandos simples, podia impulsionar o entendimento de conceitos funcionais. Indicava até o exemplo de comando estruturado por uma sintaxe própria, descrito por *área (f, a, b, h)* que refere-se a área avaliada, sob o gráfico da função, entre os pontos a e b.

Tall (1991a, p. 7) aponta as potencialidades da tecnologia no sentido de proporcionar a visualização do comportamento gráfico de uma equação diferencial ordinária – EDO (figura 7-II). Com uma preocupação semelhante, passaremos, então, a discutir certos elementos

relacionados com nosso conceito, com arrimo na tecnologia. Com a intenção precípua de apresentar os elementos explorados nos livros de Cálculo, em relação às potencialidades do *software Geogebra*, vamos considerar as equações da cardióide $\rho = a(1 - \cos(\theta))$, com $a \in \mathbb{R}$. E, também, do *limaçon com laço*, descrito por $\rho = a(1 - 2\text{sen}(\theta))$. Na figura 4 descrevemos o traço de seu comportamento para $a > 0$ e $a < 0$. Observamos as variações da curva, para cada variação correspondente do “seletor” indicado por ‘a’ (no canto direito da figura abaixo).

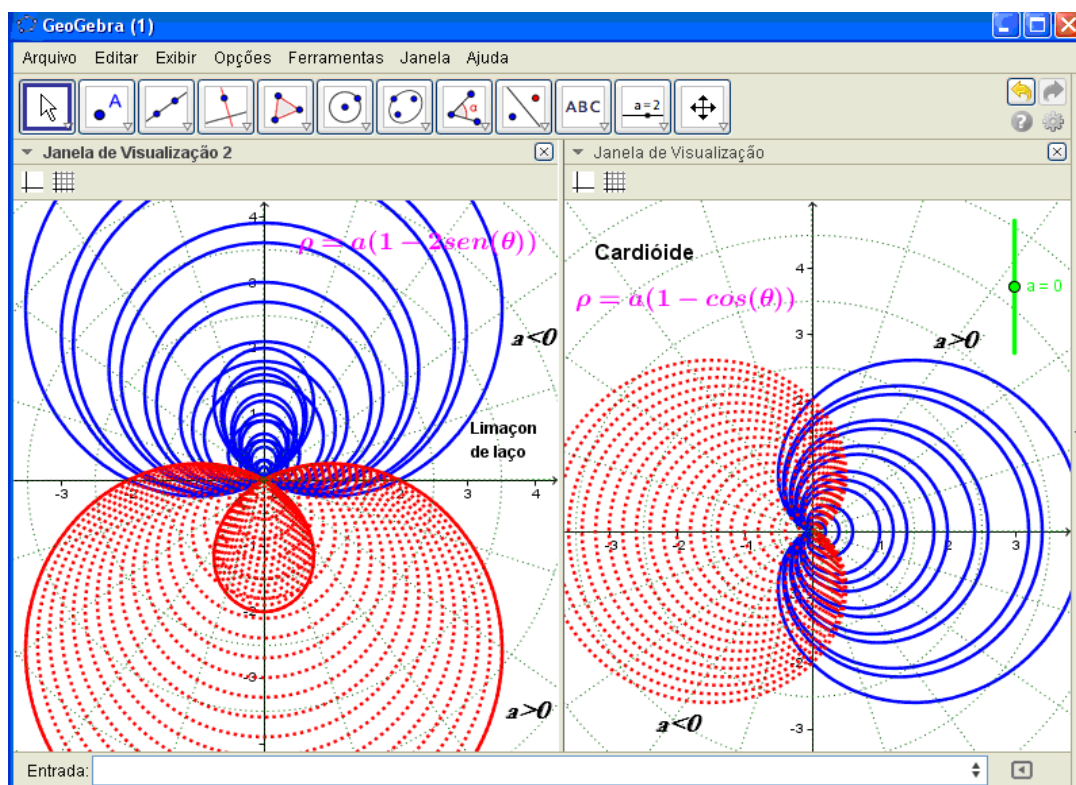


Figura 4. Com a função rastro inspecionamos o comportamento de uma família de curvas descritas em coordenadas polares

3. Situações que promovem a visualização com *software Geogebra*

Antes de abordamos algumas situações particulares, vale recordar a intenção didática de Guidorizzi (2010), ao fornecer ao leitor, três desenhos vinculados e explicativos da mesma questão (ver fig. 2). Doravante, mostraremos que, com o intermédio do *software*, temos a possibilidade de produzir uma classe bem mais ampla de configurações gráfico-geométricas da mesma região. Sem maiores delongas, vamos considerar, pois, a cardióide $\rho(\theta) = a(1 - \cos(\theta))$. Sabemos, por intermédio da formulação descrita em (*) que:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos(\theta))^2 d\theta. \text{ Assim, teremos } A = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)) d\theta.$$

Fazemos, pois, as contas, concluiremos

$$\frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} 2\cos(\theta)d\theta + \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)d\theta = a^2\pi - a^2 \int_0^{2\pi} \cos(\theta)d\theta + \frac{a^2}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\theta))d\theta \stackrel{\text{fazendo}}{\underset{\text{contas}}{=}} \frac{3\pi a^2}{2}$$

Por outro lado, vamos descrever alguns desses dados no contexto de uso do *software* e assinalar determinados aspectos negligenciados numa análise açodada do cálculo da área. Com tal intenção, exibimos na figura abaixo, a cardióide $\rho(\theta) = a(1 - \cos(\theta))$, definida a partir de um seletor ‘a’. Com o mesmo podemos variar o tamanho e a orientação dessa curva, relativa à origem dos eixos coordenados.

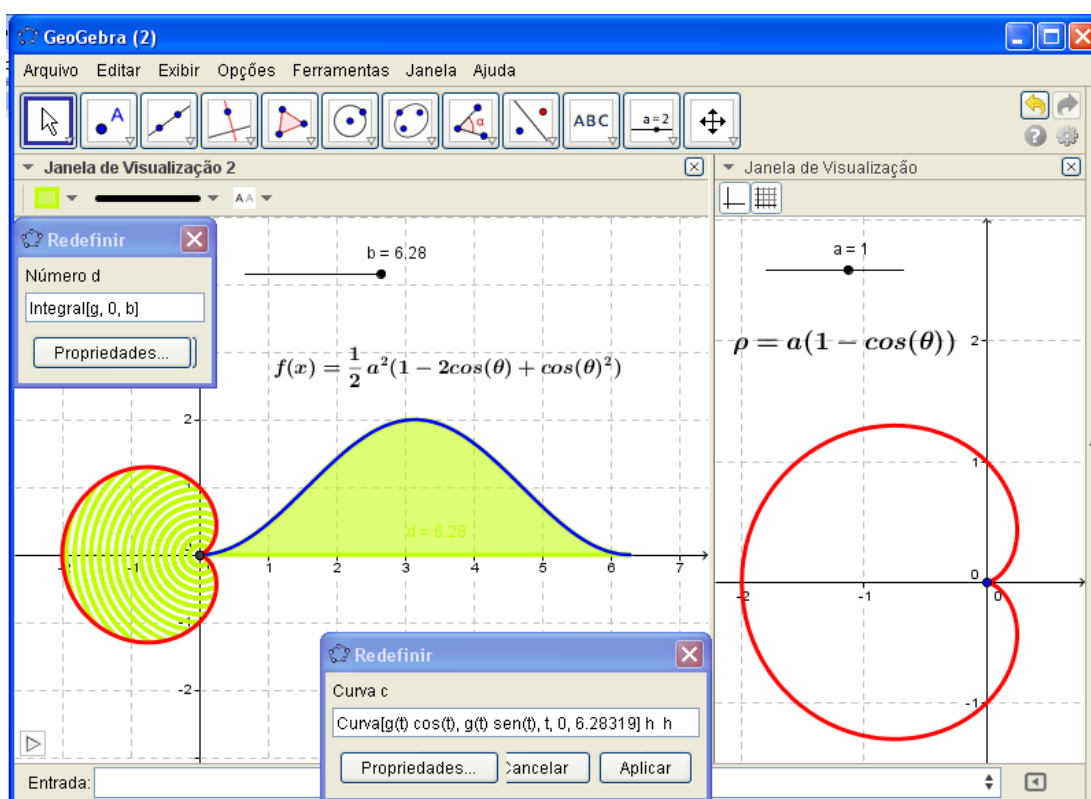


Figura 5. Relações conceituais estabelecidas com o *software* Geogebra e a cardióide

Ademais, inferimos o valor numérico assumido pela expressão $A_x = \frac{a^2}{2} \int_0^x (1 - 2\cos(x) + \cos^2(x))dx$, na medida em que $0 \leq x \leq 2\pi$. Ainda na figura 5, com recurso ao *software*, realizamos uma animação que visa mostrar ao aprendiz que, em termos numéricos, as áreas destacadas em cor verde, detém o mesmo valor. Nesse caso, realizamos o *link* entre a integral definida no sentido de Riemann, indicada no parágrafo anterior, com a região interior à cardióide.

Vamos considerar em seguida a equação $\rho = a \cdot \text{sen}(2\theta)$. Devido a simetria da figura, escrevemos: $A = 4 \times \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} a^2 \text{sen}^2(2\theta) d\theta = 2a^2 \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2(2\theta) d\theta$. Por fim, determinamos que $2a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(4\theta)) d\theta = a^2\pi$, com $a \in \mathbb{R}$. Na figura 6 descrevemos as variações possíveis para $a < 0$. Divisamos a área em cor rosa, na pétala do 1º quadrante que corresponde em termos numéricos à área da região ao lado direito, na mesma figura. Na figura 6, buscamos sublinhar que o valor $a^2\pi$ correspondente à integral anterior, admite duas interpretações. A primeira, a área da pétala (em cor rosa), a partir das coordenadas polares. A segunda, é que podemos apenas restringir nosso olhar para a região (em cor verde, ao lado direito) na figura 6.

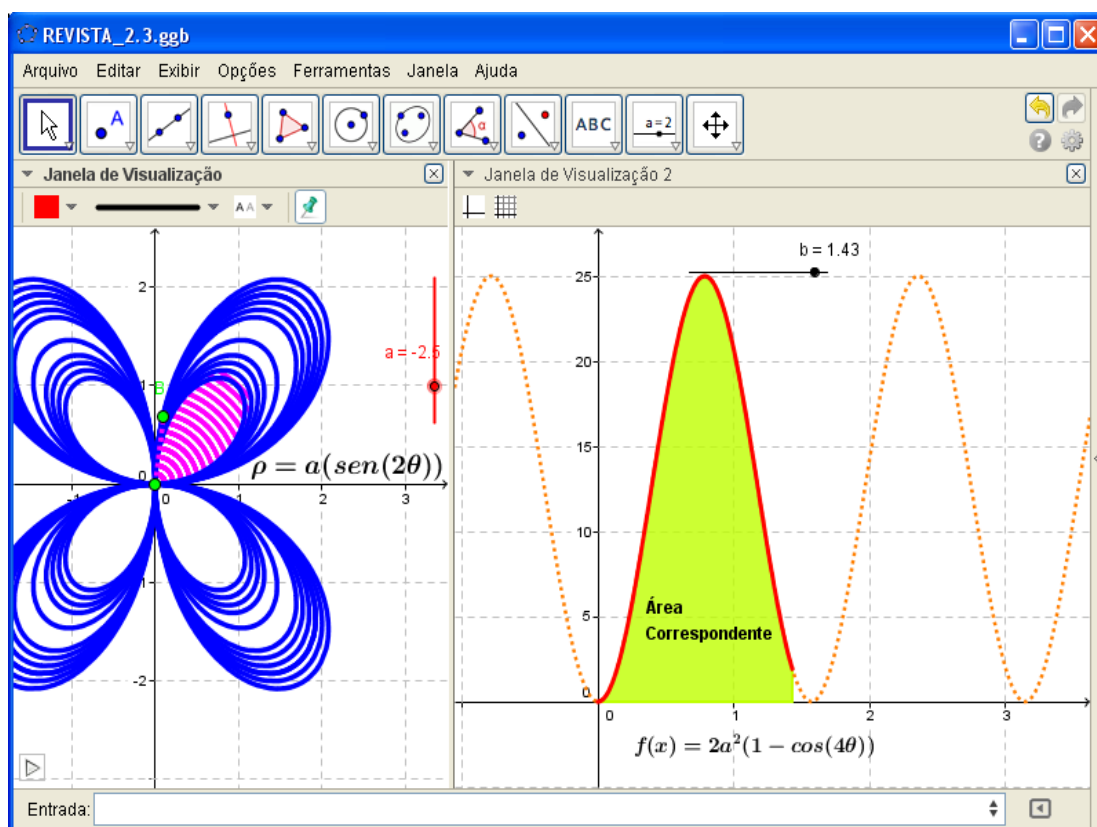


Figura 6. Relações conceituais estabelecidas com o software Geogebra e a rosácea

Consideremos agora as curvas $\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$ e $\rho = \sqrt{\text{sen}(2\theta)}$. De modo analítico, podemos impor a condição $\sqrt{\cos(2\theta)} = \sqrt{\text{sen}(2\theta)}$, quando nos atemos ao 1º quadrante apenas. Nesse caso, escrevemos ainda que $\cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta) = 2\text{sen}(\theta)\cos(\theta) \therefore \text{sen}^2(\theta) + 2\text{sen}(\theta)\cos(\theta) - \cos^2(\theta) = 0$. Notamos,

entretanto, que esta ultima equação proporciona ultteriores entraves. Outro modo de proceder é escrever $\sqrt{\cos(2\theta)} = \sqrt{\sin(2\theta)} \therefore \text{tg}(2\theta) = 1$. Segue que $2\theta = \frac{\pi}{4} \therefore \theta = \frac{\pi}{8}$.

Indicamos uma reta na figura 7 a fim de arbitrar o ponto de intersecção no 1º quadrante. Por fim, com base na figura 7, descrevemos a integral correspondente à região em cor verde, designada por $\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin(2\theta) - \cos(2\theta)) d\theta$, em que se emprega uma das variações da fórmula

(*). Por fim, obteremos $\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin(2\theta) - \cos(2\theta)) d\theta =$

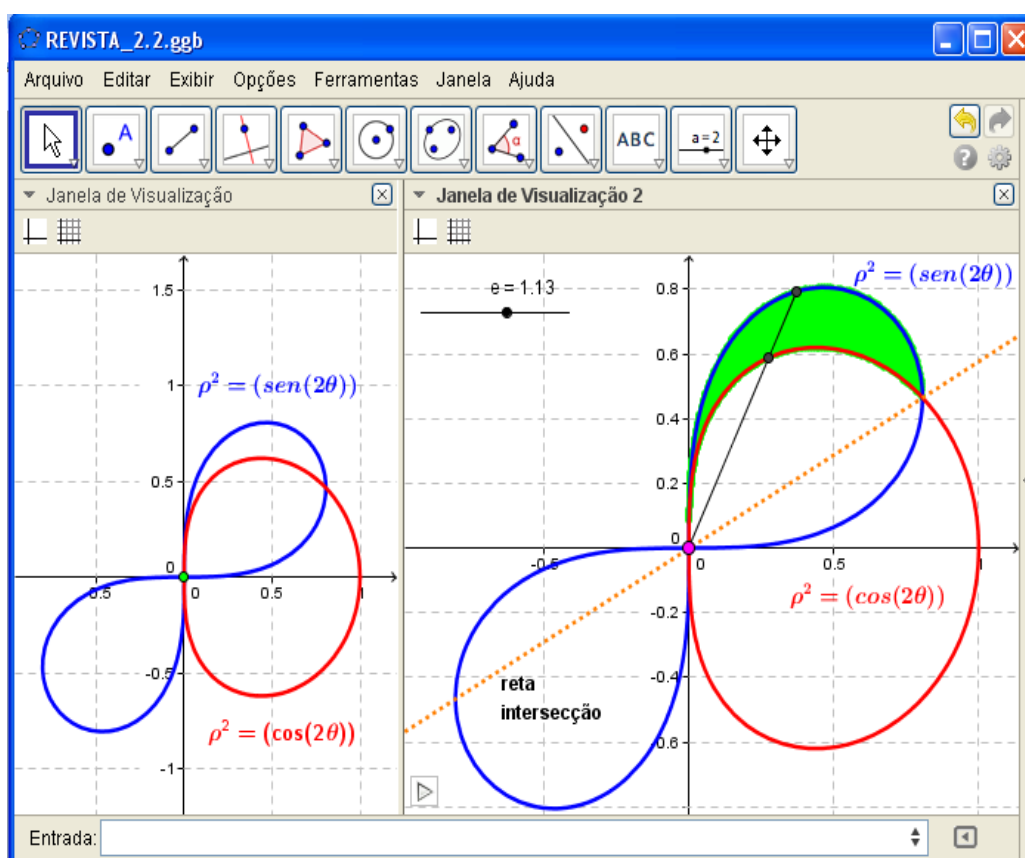


Figura 7. Exploração da região com vistas à identificação dos limites de integração

Vamos abordar, como ultimo exemplo de determinação de áreas, a curva conhecida como *limaçon de laço*. Neste sentido, o *software* nos auxiliará na análise pormenorizada de regiões envolvendo simetria da região de nosso interesse. No caso das figuras 8 e 9, deprendemos de modo inicial, duas regiões.

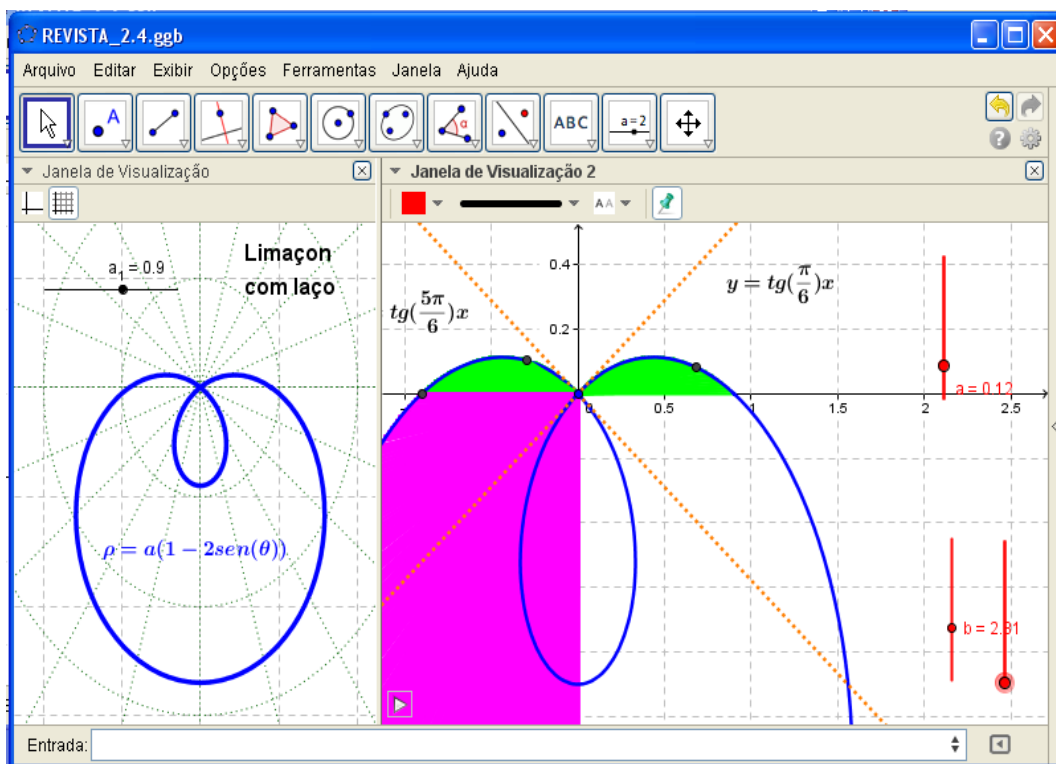


Figura 8. Identificação visual de regiões de simetria no *limaçon com laço* com o *software*

Registramos duas retas que nos servirão como guias para a descrição da integral.

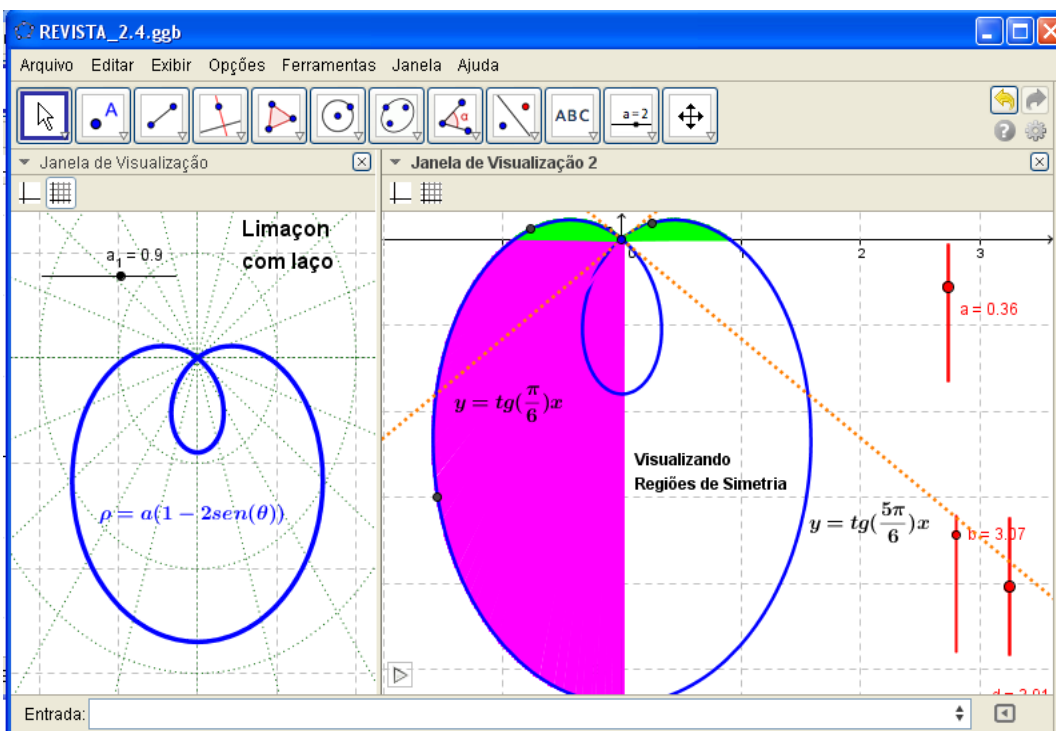


Figura 9. Identificação visual de regiões de simetria no *limaçon com laço* com o *software*

Por fim, levando-se em consideração as retas acima, que formam ângulos de $\frac{\pi}{6}$ e $\theta = \frac{5\pi}{6}$, respectivamente, com o eixo das abcissas. Por fim, estabelecemos, com base na visualização e elementos extraídos anteriormente das figuras 8 e 9, que:

$$A = 2 \times \frac{1}{2} a^2 \left(\int_0^{\pi/6} (1 - 2\text{sen}(\theta))^2 + \int_{\pi}^{3\pi/2} (1 - 2\text{sen}(\theta))^2 - \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - 2\text{sen}(\theta))^2 \right) =$$

Com respeito ainda ao exemplo que na figura 7, sublinhamos as recomendações de Stewart (1999, p. 672) ao assinalar que

O fato de que um único ponto tem muitas representações em coordenadas polares algumas vezes torna difícil encontrar todos os pontos de intersecção de duas curvas polares. [...] Então, para encontrar todos os pontos de intersecção de duas curvas, é recomendável que você desenhe os gráficos de ambas as curvas. É especialmente conveniente usar uma calculadora gráfica ou um computador para ajudar nessa tarefa.

Doravante, passamos a empregar a formulação indicada em (**), na introdução deste escrito. Na figura 10 proporcionamos uma interpretação e significação diferenciada para o comprimento do gráfico de uma curva no plano IR^2 . Com efeito, podemos, com o *software*, obter exatamente o valor numérico assumido pela integral correspondente à região em foco (ver figura 10, ao lado direito).

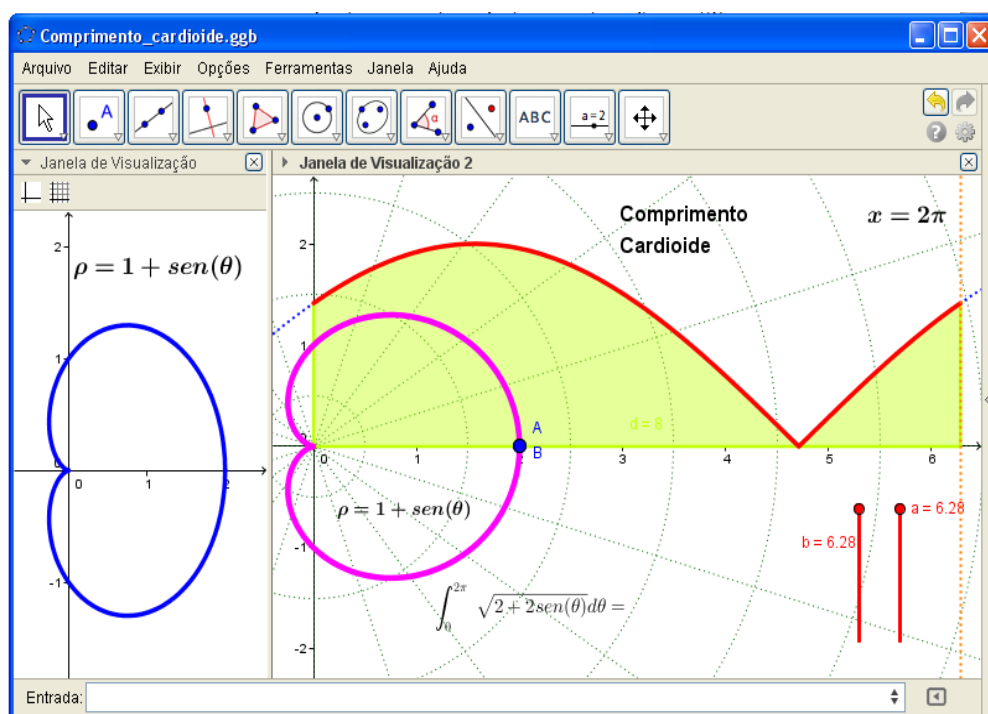


Figura 10. Relações visualização do comprimento da curva e uma região do plano com o valor correspondente da integral definida

Na figura 5 indicamos sua área. Agora, a integral indicada por $\int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos(\theta)}d\theta$ admite, todavia, duas interpretações. De fato, na primeira formulação, encontramos o comprimento da curva cardióide. No segundo caso, obtemos uma região limitada pelo gráfico da função integranda que indicamos por $\sqrt{2+2\cos(\theta)}$. Ora, de acordo com a definição de integral definida, obtemos a área da região indicada (ao lado direito), no intervalo $[0,2\pi] \subset \mathbb{R}$. Tornamos ainda os pontos móveis A e B (figura 8) móveis, com a intenção de indicar o pedaço da curva que buscamos.

Por fim, vamos tomar a seguinte parametrização particular de uma *hipociclóide* (fig. 11) $(x(\theta), y(\theta)) = (\cos(\theta) - \cos(4\theta), \sin(\theta) - \sin(4\theta))$. Para avaliar seu comprimento no intervalo $[0, 2\pi]$, escrevemos: $L_{0,2\pi} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(4 \cdot \sin(4\theta) - \sin(\theta))^2 + (\cos(\theta) - 4\cos(4\theta))^2} d\theta$.

Fazendo, pois, as contas:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(16 \cdot \sin^2(4\theta) - 8 \cdot \sin(\theta)\sin(4\theta) + \sin^2(\theta)) + (\cos^2(\theta) - 8 \cdot \cos(\theta)\cos(4\theta) + 16\cos^2(4\theta))} d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 16 \cdot \sin^2(4\theta) - 8 \cdot \sin(\theta)\sin(4\theta) - 8 \cdot \cos(\theta)\cos(4\theta) + 16\cos^2(4\theta)} d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 16 - 8 \cdot \sin(\theta)\sin(4\theta) - 8 \cdot \cos(\theta)\cos(4\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{17 - 8 \cdot (\sin(\theta)\sin(4\theta) - \cos(\theta)\cos(4\theta))} d\theta \end{aligned}$$

A ultima expressão não constitui simples tarefa, caso pensemos em recorrer a determinada técnica analítica de integração. Por outro lado, podemos considerar a função $f(\theta) = \sqrt{17 - 8 \cdot (\sin(\theta)\sin(4\theta) - \cos(\theta)\cos(4\theta))}$. Exibimos a situação na fig. 11.

Na figura 11, ao lado esquerdo, divisamos o traçado da *hipociclóide* e, ao lado direito, descrevemos (em cor rosa) a área correspondente ao resultado do cálculo da integral $\int_0^{2\pi} \sqrt{17 - 8 \cdot (\sin(\theta)\sin(4\theta) - \cos(\theta)\cos(4\theta))} d\theta$. Na figura 11 indicamos o valor numérico assumido pela área, que corresponde também, ao comprimento da curva, em consonância com a formulação (**).

Omitiremos a indicação da resolução para esta ultima integral. Apesar de que, semelhantemente ao que acontece no cálculo de comprimentos de curvas, em muitos casos, não contamos, de modo imediato, com um método analítico que funciona em todos os casos. Em outras circunstâncias, podemos contar com o pequeno pacote de computação algébrica do *Geogebra* e obter, por via ao *software*, sua primitiva.

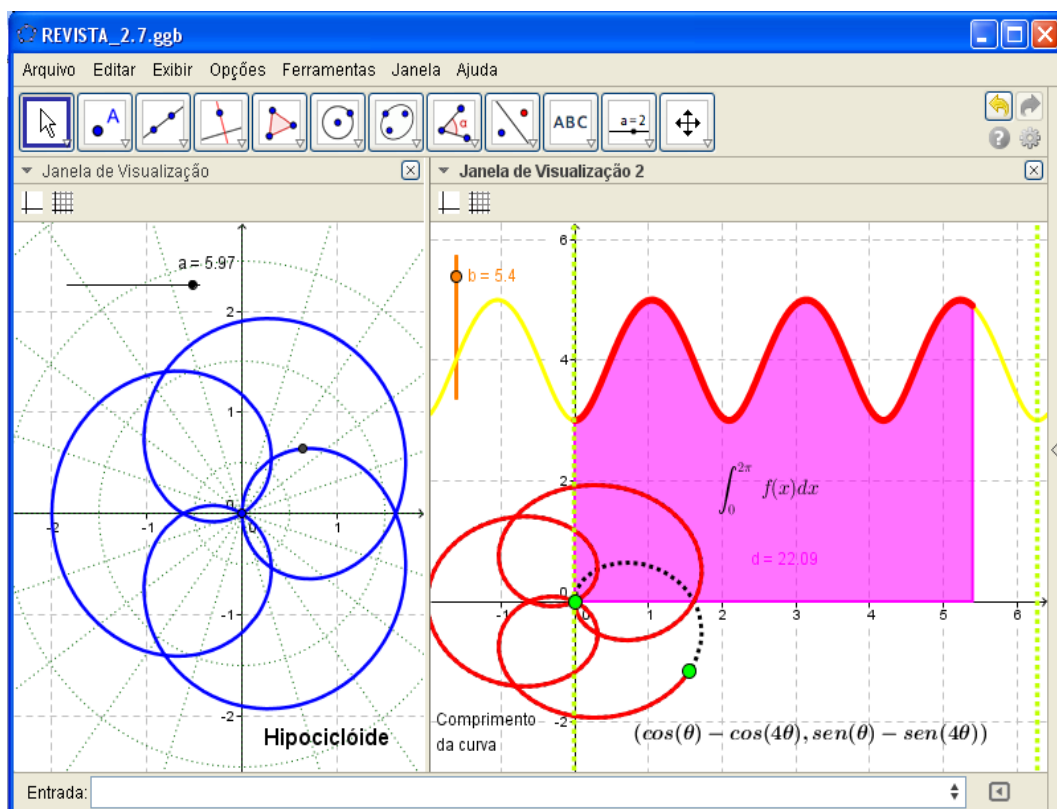


Figura 11. Relação entre o comprimento da curva com a integral definida correspondente a área

4. Considerações finais

As fórmulas que indicamos por (*) e (**), que encontramos em livros de Cálculo, permitem extrair limitadas propriedades, quando prescindimos o papel da tecnologia. Neste sentido, por meio de algumas situações particulares, buscamos assinalar de que modo a visualização detém papel fundamental para o entendimento de uma integral definida, que pode corresponder tanto a uma área, segundo a concepção de Riemann, bem como um comprimento de uma curva.

De um ponto de vista sistemático, direcionamos nossa atenção aos itens “a” e “c”, logo na introdução do texto. O aspecto que questionamos nos livros didáticos diz respeito ao caráter limitante de abordagem deste tópico, que pouco enfatiza a visualização e entendimento da origem da integral correspondente. Outrossim, ricas ligações conceituais com a integral definida são desperdiçadas.

Destacamos ao decorrer do trabalho que alguns autores (STEWART, 1999) relatam os entraves inerentes ao passo que descrevemos no item “b”. Ora, o *software Geogebra* detém o potencial, como bem mostramos na seção anterior, de vislumbrarmos outras vias, com vistas à

mediação deste saber em sala. Outrossim, entraves relacionados com o item “b” poderão ser reduzidos.

Comentamos que a descrição dos parâmetros e a utilização dos pontos móveis sobre as curvas, a partir do ajuste adequado de seletores, podem proporcionar a distinção de elementos importantes em cada caso comentado. Por fim, quando valorizamos cada passo indicado na introdução deste escrito, com uma ação didática afetada pela tecnologia, estimulamos a evolução de um componente heurístico vinculado em cada tarefa. Fato que se contrapõe àquela perspectiva de ensino formalista (KLINE, 1980) que busca promover apenas a resolução de uma ou várias integrais, que imprime ênfase ao item “d”; mas que, ao final de contas, não garante ser incorporado ao patrimônio privado, de natureza cognitiva do aprendiz (ALVES & BORGES NETO, 2013; ALVES & LOPES, 2013).

5. Referências

- ALVES, Francisco. R. V. (2011). Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 353p. Disponível em: http://www.teses.ufc.br/tde_biblioteca/login.php
- ALVES, Francisco, R, V; & BORGES NETO, Hermínio. (2013). Sobre o ensino das técnicas de integração com apoio na visualização: um estudo de caso. In: Anais do XI ENEM, pp. 1-10. Disponível em: <http://enem2013.pucpr.br/>.
- ALVES, Francisco, R, V; & LOPES, Marcos. A. (2013). Métodos de Integração: uma discussão do seu ensino com apoio no software Geogebra. In: Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo. v. 2. nº 1, p. 5-21. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/12524>
- ARTIGUE, Michelle. (1997). Le logiciel DERIVE comme revelateur des phenomenes lies a la utilisation d’environnement informatique pour l’apprentissage. In: *Educational Studies in Mathematics*. nº 33, p. 133-169.
- AYRES, Frank. & MENDELSON, Elliot. (1990). Theory and problems in differential calculus. New York: Springer.
- BOURBAKI. N. (1984). Éléments de d’Histoire de Mathématiques. Berlim : Springer Berlim.
- DAVIS, Philip. J. (1993). Spirals: from Theodorus to chaos. Massachusetts: A. K. Peters.
- EDWARDS, C. H. (1979). The historical development of Calculus. New York: Springer.
- EVES, Howard. (1969). An introduction to the History of Mathematics. third edition. New York: Holt, Rinehart and Winston.

- LEITHOLD, Louis. (1990). O cálculo com Geometria Analítica. 3ª edição, v. 2.
- KLINER, Morris. (1972). Mathematical thought from ancient and modern times. v.1. New York: Oxford.
- KLINER, Morris. (1980). Mathematics: the loss of certainty. Oxford: Oxford University Press.
- GRATTAN-GUINNES, Ivor. (1980). From the Calculus to Set Theory: an introduction History. Princeton: Princeton University.
- GUIDORIZZI, Hamilton. (2010). Um curso de Cálculo. São Paulo: LTC. 3ª edição.
- HAIRER, E. & WANNER. G. (2008). Analysis by its History. New York: Springer.
- POLYA, George. (1973). How to solve it: a new aspect of mathematical method. Princeton: Princeton University Press.
- SIMMONS. George. F. (1992). Calculus Gems: brief lives and memorable mathematics. New York: McGraw-Hill Inc.
- STEWART, J. (2001). Cálculo, v. 1, 4ª edição, São Paulo: Pioneira Thompson Learning.
- STEWART, J. (1999). Cálculo, v. 2, 2ª edição, São Paulo: Pioneira Thompson Learning.
- STILLWELL. John. (1989). Mathematics and its History. New York: Springer.
- TALL, David. (1991). Recent development in the use of computer to visualize and symbolize calculus concept. In: Laboratory approach to teaching Calculus. v. 20, p. 15-25. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1991i-comp-calc-maa.pdf>. Acessado em: 2 de agosto 2013.
- TALL, David. (1991). Visualizing Differentials in Integration to Picture the Fundamental Theorem of Calculus. In: Mathematics Teaching, nº 137, p. 29-32. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1991j-visual-dif-ft-mt.pdf>. Acessado em: 2 de agosto 2013.
- THOMPSON, Patrick. W. (1994). Images and rate of operational understanding of the Fundamental Theorem Calculus. In: Educational Studies in Mathematics. nº 26, p. 229-274.