

AS CONTRIBUIÇÕES DA ENGENHARIA DIDÁTICA ENQUANTO CAMPO METODOLÓGICO PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESFÉRICA

THE CONTRIBUTIONS OF ENGINEERING FIELD WHILE TEACHING METHODOLOGY FOR TEACHING SPHERICAL GEOMETRY

Wanderley Pivatto¹
Elcio Schuhmacher²

Resumo

Este artigo propõe a utilização de uma sequência didática construída a partir das etapas da Engenharia Didática, com situações que aforam problemas reais incentivando à pesquisa e atividades relacionadas à Geometria Esférica, contribuindo para a formação e compreensão de conceitos geométricos por parte dos estudantes. O estudo está embasado na didática da matemática que prioriza resultados de experiências em sala de aula. A metodologia segue os princípios da Engenharia Didática, que valoriza tanto o aspecto teórico como experimental, a fim de analisar as situações didáticas ocorridas em sala de aula. Espera-se com este trabalho, que os resultados obtidos revelem uma facilitação na compreensão de conceitos de Geometria Esférica, permitindo o desenvolvimento de competências para sua utilização nos problemas do cotidiano.

Palavras-chave: Engenharia didática; Metodologia; Ensino de matemática; Geometria esférica.

Abstract

This paper proposes the use of a didactic sequence constructed from the steps of the Engineering Curriculum with situations a the real problems by encouraging research and activities related to spherical geometry, contributing to the formation and understanding of geometric concepts by students. The study is grounded in the teaching of mathematics that focuses on experiences in the classroom. The methodology follows the principles of Engineering Curriculum, which values both the theoretical and experimental aspects, in order to analyze teaching situations occurring in the classroom. It is hoped that this work, the results obtained show a facilitation in understanding concepts of spherical geometry, allowing the development of skills for use in everyday problems.

Key-words: Engineering Teaching, Methodology, Teaching Mathematics; Spherical Geometry.

¹ Mestrando em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECIM -FURB/SC)

² Dr. em Física pela Universidade Federal de Santa Catarina. Coordenador do PPGECIM, DA Universidade Regional de Blumenau, FURB/SC

1. Introdução

A Matemática é considerada como uma das mais antigas ciências, tendo sempre ocupado, um dos lugares de destaque nos currículos escolares. Suas características se remetem a predicados muitos específicos, compreendido como um processo de pensamento que implica a formação e aplicação de uma cadeia de conhecimentos, muitas vezes abstratos, sem uma conexão com a realidade do estudante.

Nessa direção, a reprodução e memorização de conceitos sem a abrangência de seu significado cita D'Ambrósio (2009), fortalece a técnica tradicional de ensino. Porém, um grande esforço tem sido realizado, por parte de pesquisadores e professores para mudar esse cenário. A Matemática é importante para compreender vários aspectos do cotidiano, por isso, sua exploração com aplicações de problemas práticos é enfatizada nos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) (1998) com ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir de situações vividas no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas.

Embora as situações do cotidiano sejam fundamentais para conferir significados a muitos conteúdos a serem estudados, é importante considerar que esses significados podem ser explorados em outros contextos como as questões internas da própria Matemática e dos problemas históricos. Caso contrário, muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata (BRASIL, 1998, p. 23).

Assim, o papel do professor traz inúmeros desafios, necessitando de constante estado de atualização de conhecimentos e estratégias de ensino, pois não é mais considerado como único detentor do conhecimento e, por outro lado, o estudante deixou de ser uma página em branco onde eram gravados exercícios repetitivos. Nessa perspectiva, o professor cita Fiorentini e Nacarato (2005), constitui-se como agente reflexivo de sua prática pedagógica, passando a buscar subsídios teóricos e práticos que ajudem a compreender e enfrentar os problemas da sala de aula.

Nesses moldes, um dos referenciais que contribuem para a intenção de uma maneira específica de se trabalhar em sala de aula é denominado de Engenharia Didática, balizada por Brousseau (1996) e estruturados nas investigações de Artigue (1996). A propósito, estruturar sequências de ensino é um dos objetivos da Engenharia Didática, que coloca em destaque as relações mútuas entre professor, estudante e o conteúdo matemático. Para Artigue (1996), essa metodologia possibilita encarar problemas práticos de sala de aula, ao mesmo tempo busca valorizar o trabalho do professor em sala de aula.

2. A engenharia didática

Segundo Artigue (1996), a Engenharia Didática é um processo empírico que objetiva conceber, realizar, observar e analisar as situações didáticas. Inicialmente associada como metodologia para a análise de situações didáticas, a Engenharia Didática foi concebida como um trabalho didático de modo análogo ao:

[...] ofício do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados na ciência e, portanto, a enfrentar [...] problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta (ARTIGUE, 1996, p. 193)

A metodologia da Engenharia Didática surgiu como consequência dos estudos conhecidos como Didática da Matemática. Douady (1985) define a Didática da Matemática como a área da ciência que estuda o processo de transmissão e aquisição de diferentes conteúdos no ensino básico e universitário, propondo-se a descrever e explicar os fenômenos relativos ao ensino e a aprendizagem específica da Matemática. No entanto, a Didática da Matemática não se reduz a pesquisar uma boa maneira ou modelo de ensinar uma determinada noção ou conceito particular.

Para Artigue (1996) é preciso um metodologia de investigação científica que procure extrair relações entre pesquisa e ação sobre o sistema baseado em conhecimentos didáticos preestabelecidos. Nessa direção, a Engenharia Didática enquanto metodologia de pesquisa caracteriza-se como produto didático que envolve plano de ensino, a criação de materiais didáticos e esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala, ou seja, sobre a concepção, a realização, a observação e a avaliação.

Deste modo, o trabalho do professor é “[...] propor ao estudante uma situação de aprendizagem para que elabore seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta, e os faça funcionar ou os modifique como resposta às exigências do meio e não a um desejo do professor” (BROUSSEAU, 1996, p. 49). Em geral, o papel do professor é oferecer um conjunto de boas situações de ensino, de modo a aperfeiçoar a ação autônoma do estudante. Estas sequências de atividades devem permitir que o estudante atue sobre a situação, com a mínima interferência explícita ou condução do professor.

A atuação ativa do estudante no processo de ensino e aprendizagem apresenta um requisito fundamental que precisa ser valorizado que é a pesquisa, enquanto trabalho que envolve planejamento. O sucesso da pesquisa também está condicionado ao procedimento, envolvimento e a habilidade de escolher o caminho adequado para verificar os objetivos da investigação. A

Engenharia Didática enquanto vertente da pesquisa qualitativa, busca estudar os problemas inerentes à aprendizagem de conceitos específicos da Matemática: diagnóstico de concepções, ingerências, compreensão do desenvolvimento lógico das estratégias dos estudantes, a aprendizagem, dentre outras.

Assim, os pressupostos de Brousseau (1996), dentro da metodologia da Engenharia Didática contribuem para descrever a situação, estabelecendo questionamentos, observações, proporcionando significado ao objeto em estudo. A Engenharia Didática, como metodologia relatada por Artigue (1996), compreende quatro etapas: a 1ª etapa, das análises preliminares, a 2ª etapa da concepção e da análise a priori, a 3ª etapa, da experimentação e a 4ª e última etapa, da análise a posteriori e validação, conforme figura 1 a seguir.



Fonte: (Do autor, 2013)

Figura 1: Etapas da Engenharia Didática.

A etapa 1 (**análise preliminares**) está apoiada em um referencial teórico já obtido e analisa como se encaminha determinado conhecimento no estudante, como se dá o ensino atual em relação àquele conhecimento, as concepções dos estudantes, as dificuldades e ingerências, que segundo Artigue (1996) marcam a evolução do conteúdo a ser estudado. Nesta etapa, portanto, realiza-se uma revisão literária envolvendo as condições e contextos presentes nos vários níveis de produção didática e no ambiente onde ocorrerá a pesquisa, assim como uma análise geral quanto aos aspectos histórico-epistemológicos dos assuntos do ensino a serem trabalhados e dos efeitos por eles provocados, da concepção, das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos dentro deste contexto de ensino.

A etapa 2 (**concepção e análise a priori**), envolve a definição das variáveis que estarão sob controle, que para Artigue (1996) comporta uma parte descritiva e outra preditiva, onde o comportamento do estudante é o ponto principal da análise. Nesta etapa, Machado (2002) ressalta que a pesquisa delimita as variáveis de comando, que são as variáveis locais ou globais pertinentes ao Sistema Didático (professor/aluno/saber) que podem ser consideradas pelo pesquisador/professor para que sejam abordadas as várias sessões ou fases de uma Engenharia Didática.

A etapa 3 (**experimentação**), que é ação de ir ao *locus* para aplicação da sequência didática, com população predefinida e os registros das observações realizadas na investigação. Dessa maneira, a experimentação pressupõe a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa a população de estudantes que participará da experimentação; o estabelecimento do contrato didático; a aplicação do instrumento de pesquisa; o registro de observações feitas na experimentação (MACHADO, 2002). No contrato didático é essencial à consciência da não interferência explícita de conhecimentos, evitando-se explicações ou ‘dicas’ cita Brousseau (1996), facilitando as resoluções dos estudantes, propiciando assim condições que permitam sua mobilização em enfrentar o problema e em resolvê-lo, mesmo que parcialmente, através da lógica e dos conhecimentos anteriores.

Por fim, a etapa 4 (**análise a posteriori e validação**) que se assenta na amálgama de dados coletados quando da experimentação, mas também na construção de conhecimentos dos estudantes em sala de aula e fora dela. Para Artigue (1996), os dados são geralmente completados por dados obtidos pela utilização de metodologias externas: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizados em diversos momentos do ensino ou a partir dele. Esta etapa se caracteriza pelo tratamento dos dados colhidos e a confrontação com a análise a priori sugere a autora, permitindo a interpretação dos resultados e em que condições as questões levantadas foram respondidas. Assim, é possível analisar se ocorrem e quais são as contribuições para a superação do problema, caracterizando a generalização local que permitirá a validação interna do objetivo da pesquisa.

O aporte da Engenharia Didática para a o ensino como campo metodológico, refere-se à possibilidade de apresentar a fundamentação teórica para que o professor conheça o significado e amplie o leque de opções, formando elo entre a teoria e a prática de sala de aula. Baseado nessa premissa que o artigo justifica sua importância.

3. Sequência didática para o ensino de geometria esférica

Com o objetivo de colocar em prática os pressupostos teóricos da Engenharia Didática, foi escolhido o tema de Geometria Esférica, um tema não pertencente ainda ao currículo do ensino básico. A justificativa desta escolha está vinculada a existência de situações de simples compreensão, envolvendo triângulos, curvas, circunferências, que permitem o envolvimento com vários conceitos presentes no currículo do ensino de Geometria.

Os avanços da **Geometria Esférica** se devem aos trabalhos do alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann. Com base em uma linguagem intuitiva, Riemann apresentou um conjunto de conceitos e postulados que mais tarde passaria a ser conhecido como Geometria Esférica. De acordo com Mlodinow (2010), Riemann afirmava que o plano é a superfície de uma esfera e uma reta é interpretada como o círculo máximo. Por fim estabeleceu a impossibilidade de traçar retas paralelas a um ponto qualquer da esfera e concluiu que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico é superior a dois ângulos retos.

Segundo Petit (1982), Courant e Robbins (2000), a Geometria Esférica colocou em xeque o sistema geométrico de Euclides. Se Riemann não tivesse sido tão imprudente em incluir a Geometria na sua lista de interesses, o instrumento matemático que Einstein precisou para explicar a teoria da relatividade não teria existido. Passamos, a seguir, a descrever as quatro fases (Análises preliminares; Concepção e Análise a priori; Experimentação; Análise a posteriori e validação) da Engenharia Didática que pode ser aplicada a um grupo de estudantes do ensino básico.

1ª etapa: Análises preliminares

Como premissa da utilização da Engenharia Didática, a 1ª etapa (das análises preliminares) deve apresentar justificativa (figura 2) para a importância da Geometria Esférica para o ensino básico, levando-se em consideração os pressupostos necessários deste nível de ensino e as contribuições que tal inserção possa promover.



Fonte: (Do autor, 2013)

Figura 2: Algumas justificativas para a importância da abordagem do tema.

Segundo Almouloud (2004), apesar da Geometria ser um ramo importante da Matemática, por servir principalmente de instrumento para diversas áreas do conhecimento, existe atualmente problemas relacionados ao seu ensino, caracterizadas pela falta de correlação com outras áreas do conhecimento, o que impede uma visão mais ampla e crítica por parte do estudante. Cabariti (2006) cita alguns estudos e práticas docentes a partir do levantamento de alguns aspectos que destacam o interesse de uma proposta de aprofundamento da Geometria Euclidiana, cujos conceitos são objetos de ensino na Educação Básica, afirmam que a riqueza da história da Geometria proporcionaria um estudo sobre Geometria Esférica.

Barreto (2007), no seu artigo intitulado: “*Do mito da Geometria Euclidiana ao ensino das Geometrias não Euclidianas*”, publicado na revista *Vértices*, aponta a Geometria como um dos tópicos de discussão da atualidade, necessitando de reformulação do ensino no Brasil. Ela cita que a Geometria Esférica forma um ramo da Matemática importante sob o ponto de vista histórico e educacional.

Leivas (2012), em seu artigo: “*Educação geométrica: reflexões sobre ensino e aprendizagem em Geometria*”, publicado na revista SBEM-RS realiza uma reflexão teórica a respeito do tema

Educação Geométrica, buscando oferecer subsídios para a formação inicial e continuada de professores de Matemática, sobre possibilidades para o ensino e a aprendizagem em Geometria. À luz do que indicam os Parâmetros Curriculares Nacionais, tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio. Passamos ao delineamento do quadro-síntese (quadro 1) das ponderações que permearam a primeira etapa.

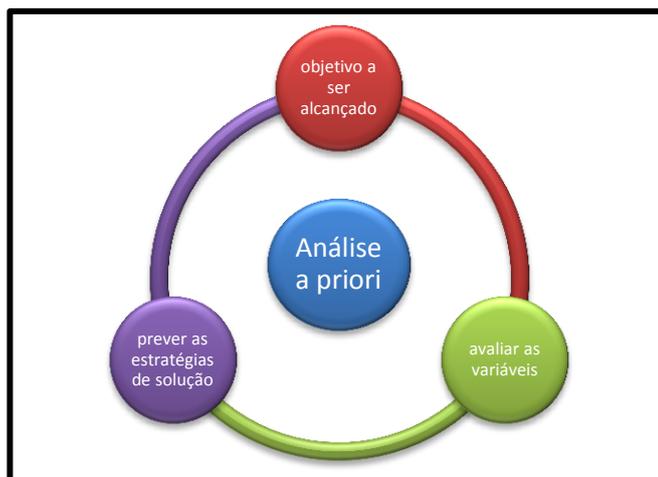
Quadro 1: Ponderações à primeira etapa da Engenharia Didática:

1	Quadro didático, desenvolvido de acordo com a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996).
2	Nos conhecimentos mais específicos envolvendo Geometria Esférica, embasado na Geometria, cujo desenvolvimento fornece subsídios para compreensão de sua relevância e lugar no ensino básico.
3	As várias concepções metodológicas e conceituais encontradas no decurso do desenvolvimento histórico da Geometria Esférica Equações e da relação com as possíveis resoluções em situações-problema contextualizadas Brolezzi (1996).
4	Pesquisas que constatarem a escassa exploração de situações-problema no livro didático de Ensino Médio envolvendo implicitamente conceitos de Geometria Esférica.
5	Os possíveis entraves, que se situam na utilização pelos estudantes de habilidades como a interpretação e a busca de heurísticas para a resolução de problemas contextualizados em no globo terrestre.

2ª etapa: A Concepção da sequência didática e a Análise a Priori

Na segunda etapa, são determinadas as variáveis globais que permitem a caracterização e concepção da sequência didática envolvendo a Geometria Esférica, a saber: a adoção de alguns aspectos da teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996); a utilização de situações-problema como recursos didáticos; a realização de atividades em duplas, que viabiliza a comunicação entre os estudantes para possível utilização de conhecimentos como ferramenta para a resolução das atividades.

Na análise a priori de cada questão (figura 3), é importante determinar o objetivo, avaliar as variáveis didáticas envolvidas e prever as estratégias de resolução. Ressalta-se a importância de realizar uma análise a posteriori objetivando verificar se faz necessária uma correção na elaboração da sessão seguinte.



Fonte: (Do autor, 2013)

Figura 3: elementos observáveis na análise a priori.

Passamos, a seguir, a descrever as considerações presentes nos três requisitos acima a serem realizados.

3ª etapa: A experimentação (sequência didática): 1ª fase.

Os objetivos da 1ª fase é proporcionar aos estudantes o interesse para o tema; identificar as concepções dos estudantes acerca da geometria terrestre; reconhecer a existência da Geometria Esférica; utilizar de pontos cardeais. Espera-se que o estudante utilize a tentativa e erro no decorrer das atividades e perceba as limitações da Geometria Euclidiana, iniciando a busca por outros meios. As estratégias que podem ser previstas, em ordem decrescente de probabilidade, são:

E1: A utilização do globo terrestre, após a tentativa e erro.

E2: A busca das soluções utilizando conceitos de geometria esférica.

E3: O abandono da superfície plana e a busca da solução em uma superfície esférica.

Atividade 01: Correndo e não retornando.

As variáveis didáticas envolvidas nesta 1ª atividade são:

- a noção de reta, pertencendo ao domínio da Geometria, de fácil compreensão e representação simbólica.

- a relação entre a distância percorrida e o formato da imagem do trajeto, que permite a existência de mais de uma solução.

Problema: É possível ocorrer que um caçador ao partir de certo ponto da Terra, e andar 10 km para Sul, 10 km para Leste e 10 km para Norte, voltar ao ponto de partida?

Para a organização do registro de respostas, delinea-se uma tabela que pode ser reproduzida, com maior espaçamento, conforme o quadro 2.

Quadro 2: Tabela para organização das respostas:

Superfície escolhida	Possibilidades para solução

Atividade 02: De uma ilha à outra.

As variáveis didáticas envolvidas nesta 2ª atividade são:

- o percurso da tripulação, sendo sua representação de fácil compreensão;
- noção de geodésica, que permite demonstrar a noção de reta na Geometria Esférica;
- o número de soluções previstas: duas, trajetória retilínea e curvilínea;

Problema: Seja bem-vindo estudante! Você agora é parte da tripulação do navio LOBARIEMAN. A sua missão é encontrar uma coleção de artefatos da coroa que, há muitos anos, esteve escondido em Fernando de Noronha, Brasil. Para não levantar suspeitas sobre as atividades da marinha brasileira, você partirá da ilha de Florianópolis, capital de Santa Catarina. Essa missão exige o máximo de sigilo e precisão.

- Para a tripulação LOBARIEMAN chegar a Fernando de Noronha, como você acha que será o percurso percorrido?
- Em Geometria, qual a figura que você usaria para representar esse percurso?
- Como você representaria no papel a situação a) e b)?

3ª etapa: A sequência de aprendizagem: 2ª fase.

Atividade 03: O avião maluco.

Esta atividade objetiva que o estudante perceba que uma situação pode ou não ter solução e limita o uso da tentativa e erro, incentivando a busca de outras estratégias facilitadoras, assim como estabelecer conjecturas envolvendo a relação entre a trajetória do avião e as possíveis consequências de sua rota.

A situação-problema O avião maluco propõe o texto abaixo:

Problema: O piloto de um avião comercial avisa a seus passageiros que sairá São Paulo com destino a New York às 14 hs e que o tempo de duração da viagem está estimado em 6 horas, com o trajeto inclinado à direita. O copiloto aproveita da situação e comenta com o piloto sem saber que seu microfone está aberto que irão fazer uma trajetória retilínea, mostrando assim o caminho utilizado a todos os passageiros.

(a) Você concorda ou discorda do copiloto? _____

Explique, embasando seus argumentos associado a algum comentário ou cálculo matemático, que exemplifique a posição assumida por você.

(b) Agora, cada dupla deverá expor seu argumento a duplas que tiveram argumento contrário. Terminada a exposição, cada grupo terá que apresentar um veredicto quanto ao argumento de outra dupla:

() Argumento correto ou () Argumento incorreto

Se assinalou argumento incorreto, descreva abaixo o motivo.

As variáveis didáticas são:

- a trajetória apresentada antes da saída do avião;
- a escolha de uma história, que propicie ao estudante uma situação fictícia e que o desvincule do usualmente estabelecido, possibilitando um repensar desta realidade;
- a escolha de situação-problema desafiadora, que permite ao estudante interpretar os dados relevantes, a reflexão para o levantamento de hipóteses, expor e ouvir os argumentos de outras duplas para a tomada de decisão e o debate;

As estratégias que é possível ocorrer, em ordem decrescente de probabilidade, são:

E1: Por tentativa e erro, o estudante ensaia várias possibilidades, para a busca de possíveis trajetórias, utilizando de representações simbólicas e textuais.

E2: A utilização do conceito geodésica, como significado para compreensão da trajetória formada pelo avião.

Atividade 04: Andando sobre a esfera.

Esta atividade objetiva a vivência pelos estudantes de uma situação problema que envolvesse uma maior quantidade de conceitos de Geometria Esférica em relação às atividades anteriores e cálculos de área e comprimento, de modo a dificultar a determinação a solução pela tentativa e erro, o que favorece a busca de alternativas.

Problema: A figura 4 abaixo que mostra como 15° de longitude no Equador corresponde a 1.669,792km enquanto que à latitude de Lisboa (38°N) já só representam 1.314km. E muito

perto do Pólo Norte (ou Sul), até mesmo 360° de longitude pode equivaler a apenas alguns centímetros.

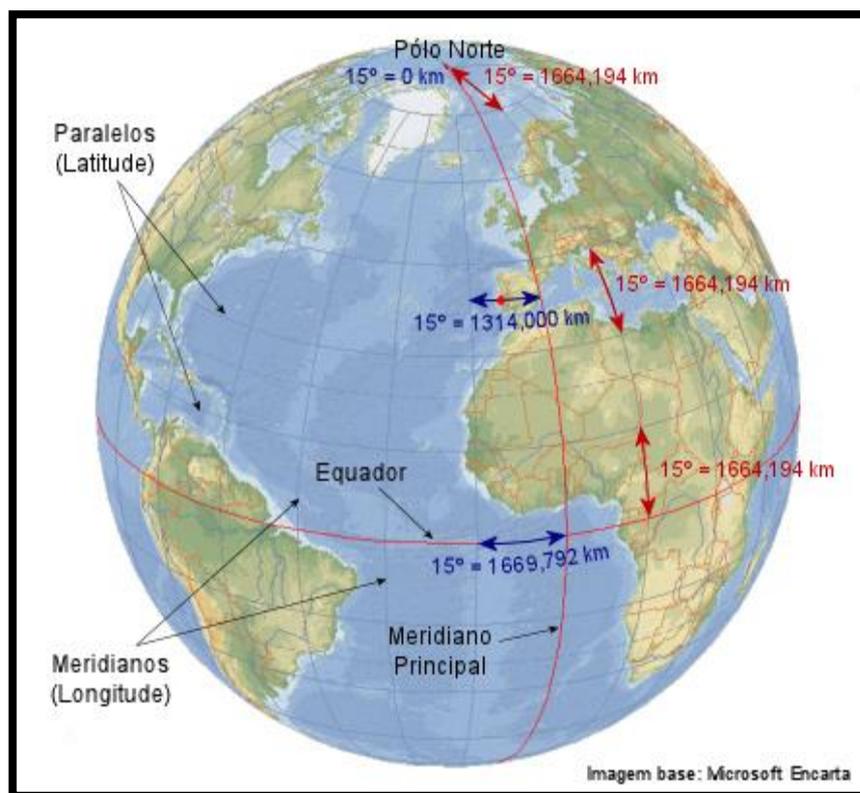


Figura 4: modelo terrestre.

- a) Se você sair do Pólo Norte e caminhar sobre qualquer meridiano até chegar à linha do Equador, em seguida girando 90° para a esquerda ou direita e caminhando 45° , e retornando por outro meridiano até o Pólo Norte, quantos km você teria viajado?
- b) Os valores acima apresentados foram calculados com base nos dados adaptados no sistema WGS84 (utilizados na navegação por GPS): Raio equatorial da Terra: 6378,137 km Raio polar da Terra: 6356,752km. O que significa essa diferença de valores?

Atividade 05: Síntese.

O objetivo desta síntese é inicialmente, registrar e organizar as produções dos estudantes realizadas individualmente ou em duplas, com a mínima intervenção do professor. É possível no segundo momento, que o professor estenda a discussão para a classe. Dentre as inúmeras ponderações dos estudantes, é papel do professor promover a seleção das conjecturas válidas, por meio das comparações entre os resultados.

A etapa de síntese é baseada na Didática da Matemática, institucionalizado por Brousseau (1996), para representar o momento da dialética da situação didática. Na institucionalização, o professor reconhece os conhecimentos desenvolvidos pelos estudantes,

organizando e classificando com relação ao contexto. Na sequência didática, espera-se que os estudantes percebam que os problemas tratam de situações relativos à Geometria Esférica, descartando as noções comuns da Geometria Euclidiana. É esperado também que os estudantes abandonem a tentativa e erro e evoluam para o uso de conceitos e propriedades pertinentes a Geometria Esférica.

Sob este foco, a abertura dos debates pode permitir que algum estudante possa expor as considerações desenvolvidas nas atividades. Estes argumentos poderão ser valorizados pelo professor, que poderá encaminhar um fechamento para escolher todos os conhecimentos no campo algébrico e geométrico. O enunciado proposto para a Síntese está exposto no quadro 03.

Quadro 3: Organização proposta para o registro e discussão dos resultados da situação de aprendizagem:

Você irá retornar aos problemas anteriores, preenchendo a tabela abaixo. Procure o título dos problemas, quantas e quais foram às soluções encontradas, assim como represente por meio de desenho a cada situação-problema apresentada.

Situação-problema	Título	Soluções		Represente por meio de desenho ou texto explicativo
		Quantas?	Quais?	
1				
2				
3				
4				
...				

Observando o quadro acima, como você descreveria um critério para diferenciar conceitos de Geometria Euclidiana da Geometria Esférica.

As estratégias que podem ser previstas, em ordem decrescente de probabilidade, são:

E1: O estudante não formula critério.

E2: O estudante percebe e descreve alguma propriedade da Geometria Esférica, como geodésica, trajetória curvilínea, triângulo esférico, ângulo esférico, mas não estabelece critério.

E3: O estudante conjectura acerca do arco esférico e a trajetória curvilínea, válida para superfícies não euclidianas.

Considerando-se as atividades propostas nas duas fases da sequência didática tematizadas na Geometria Esférica, apresenta-se alguns possíveis resultados seguida da análise posteriori.

4ª etapa: análise a posteriori e validação.

Para a aplicação da sequência didática embasado na metodologia da Engenharia Didática, é importante fixar algumas considerações fundamentais com os estudantes:

- o professor não pode fornecer informações ou dicas para a interpretação, o encaminhamento e a resolução das atividades propostas;
- as atividades em dupla devem resolver as atividades conjuntamente e, por isso, é importante a comunicação;
- os estudantes devem deixar todo e qualquer procedimento registrado por escrito, mesmo considerando algo errado ou inadequado para a solução. Não devem riscar os procedimentos errados, mas somente prosseguir na resolução, pois isto permite ao professor a leitura dos caminhos percorridos pelos estudantes para a resolução das atividades.

Encaminhamentos para análise a posteriori da atividade 1

A partir da análise a priori, é esperado na análise a posteriori que:

- os estudantes percebam a impossibilidade de solução, se for traçado sobre um mapa plano, vivenciando assim uma situação que implicitamente representa um problema de Geometria Esférica;
- ocorra desconsideração da representação geométrica do planeta, desconhecendo a existência de outras geometrias além da Euclidiana, o que pode indicar uma ausência de aprendizagem;
- o conhecimento de outras geometrias contribuindo para dar significado à Geometria de Euclides;
- os desenhos como as transcrições evidenciem uma melhora significativa na compreensão e na qualidade da descrição dos conceitos e símbolos;
- uma manutenção na posição de inércia, não demonstrando explicitamente, uma postura para eventuais mudanças no comportamento e no seu desenvolvimento cognitivo;
- dificuldade de alguns estudantes em considerar outros conhecimentos para resolução de problemas;

- devido ao alto nível de ansiedade ou uma experiência crônica de fracasso num determinado conteúdo isso acarreta uma falta de confiança em sua capacidade de aprender significativamente.

Encaminhamentos para análise a posteriori da atividade 2

A partir da análise a priori, é esperado na análise a posteriori que:

- os estudantes entendam que a trajetória ideal para representar a distância entre a ilha de Florianópolis a Fernando de Noronha seria uma curva;

- assimilem o conceito de menor distância entre dois pontos e diferenciem seu comportamento em uma superfície plana e esférica;

- considerem apenas uma distância provavelmente pelos conhecimentos advindos da Geometria Euclidiana;

- o estudante externalize sua compreensão por meio da oralidade ou da escrita acerca do conteúdo abordado;

- o estudante questione sobre suas atitudes e a partir de suas experiências boas ou ruins, comece a construir os conceitos de Geometria Esférica;

- os desenhos apresentem elementos essenciais que justificam o pensamento não euclidiano para ilustrar o problema;

- dificuldades de utilizar os conhecimentos de Geometria Esférica para a resolução do problema.

Encaminhamentos para análise a posteriori da atividade 3

A partir da análise a priori, é esperado na análise a posteriori que:

- os estudantes entendam que para realizar o trajeto, o avião precisa traçar uma rota curvilínea;

- ocorra a utilização da trajetória curvilínea pelo avião, evitando assim, possíveis problemas como “pressão”, “oxigênio” e “combustível”.

- ocorra relações explanatórias entre trajetória e pressão, pressão e oxigênio, trajetória e combustível, reconhecidas como uma criatividade que muitas vezes é difícil de reconhecer, e ainda, mais difícil de mostrar aos outros;

- ocorra relações conceituais, devendo ser reconhecidas pelo professor, de forma positiva, pois a aprendizagem é um processo onde o estudante reconhece novas relações conceituais entre conjuntos de conceitos ou proposições;

- ocorra compreensões para a impossibilidade de chegar ao destino, caso o avião resolvesse realizar uma trajetória em linha reta;

- ocorra registros como “oxigênio”, “órbita”, “explosão”, “altura”, “reta euclidiana”, “atmosfera”. Esses conceitos pertencentes a outras áreas do conhecimento representam uma versão altamente simplificada, abstrata e generalizada da realidade.

Encaminhamentos para análise a posteriori da atividade 4

A partir da análise a priori, é esperado na análise a posteriori que:

- os estudantes em geral apresentem a seguinte estratégia para a questão: a partir do centro da Terra, conhecendo aproximadamente o raio, usa-se a equação que relaciona o comprimento do arco em função do raio e seu ângulo central;

- os estudantes mostrem dificuldades de compreensão na relação entre as distâncias em graus e quilômetros entre os paralelos e meridianos;

- apareçam dificuldades em conceitos básicos de Matemática, com falta de hábito de leitura e problemas em relacionar o conteúdo com outras áreas do conhecimento;

- respostas adequadas com os dados obtidos a partir da imagem, demonstrando além de uma aprendizagem representacional, coerência e domínio matemático;

- os estudantes não estejam habituados com exercícios que envolvem conversão de graus para quilômetros;

- os estudantes apontem que o comprimento dos meridianos sejam todos iguais;

- os estudantes lembrem que para calcular o comprimento de um meridiano que na Geometria Esférica é chamado de círculo máximo, bastando realizar uma multiplicação entre a representação em quilômetros de 15° por vinte e quatro.

Encaminhamentos para análise a posteriori da atividade 5

A partir da análise a priori, é esperado na análise a posteriori que:

- os estudantes registrem e organizem a produção obtida por eles, estabelecendo relações entre as situações problema e a possibilidade de solução para o problema proposto;
- organizem as respostas de modo correto, distinguindo as soluções particulares em função da geometria apresentada;
- descrevam de modo completo as soluções das atividades;
- o objetivo desta atividade seja atingido pelos estudantes, abandonando a tentativa e erro pelo uso de estratégias já mencionadas para a questão.

4. Considerações finais

É importante salientar a importância dos trabalhos de Guy Brousseau, associada à Engenharia Didática como suporte teórico e metodológico, contribuindo significativamente para a construção de conhecimentos de Geometria Esférica em sala de aula.

No processo tradicional de ensino, a Geometria é apresentada pelo professor, esperando que os estudantes se apropriem do conhecimento. A sequência de aprendizagem que é proposta inverte este modelo de apresentação. É a partir da estratégia de tentativa e erro, que os estudantes podem desenvolver diversas estratégias como ferramenta para a resolução de situações-problema. Neste trabalho, o uso de símbolos geométricos como linguagem representacional potencializa a aprendizagem de conceitos de Geometria Esférica.

Nesta perspectiva, esse trabalho mais do que resultados esperados, sinaliza a necessidade de aprofundar novas questões desencadeadas no processo de ensino e aprendizagem de Geometria Esférica. Significa a aceitação do caráter de provisoriedade do conhecimento, que impulsiona professores curiosos, a qualificar suas ações profissionais. Seria importante ressaltar que esse trabalho, de forma alguma está terminado, uma vez que o material abordado deve continuar sendo explorado.

Os materiais utilizados na sequência didática são considerados potenciais e eficazes, ao possibilitar compreensões e tratamento específicos por parte dos estudantes na apropriação dos conceitos de Geometria Esférica. Ainda na análise a priori e a posteriori dos resultados, busca-se constatar na abordagem de conceitos geométricos, euclidianos e esféricos, a visualização e a compreensão são facilitadas quando os estudantes manipulam e constroem os objetos para a sua representação. A participação do professor enquanto mediador no processo de construção dos

conceitos é essencial, pois se reconhece a dificuldade de transformar situações concretas em pensamento matemático.

Para Davis, Nunes (2005), existe a necessidade de se construir, nas salas de aula, uma cultura do pensar, que propicie aos alunos: a) uma forma de explicitar, desde cedo, modalidades de pensamento, tornando-as, assim, passíveis de ser compartilhadas; b) um estímulo ou motivação para pensar, de forma a alcançar decisões acertadas; c) a coragem para enfrentar situações novas; d) a transferência de estratégias e conhecimentos gerados em um dado contexto para outros. Um aspecto central na implementação de uma cultura do pensamento é desenvolver habilidades metacognitivas, pois é por meio delas que se torna possível a elaboração de conhecimentos e formas de pensar que assegurem maior possibilidade de sucesso e generalização, bem como a aquisição da autonomia na gestão da aprendizagem e na construção de uma autoimagem de aprendiz.

A escolha da temática da sequência didática na abordagem de Geometria Esférica, assunto ainda veiculado somente no Ensino Superior, fica delineada pelo potencial deste assunto para a utilização de várias linguagens, como verbal, geométrica e textual. Esta natural possibilidade mostra-se promissora para que os estudantes entendam o papel de cada uma dessas linguagens e o papel da representação geométrica como alternativa otimizada e organizadora na busca das soluções adequadas em função da geometria abordada. Nesta vertente, a sequência didática se apresenta como uma oportunidade de explicitação do pensamento geométrico, através da institucionalização realizada pelo professor, assim como pelas locuções orais e escritas dos estudantes que podem ocorrer durante o processo de aprendizagem.

Além dos possíveis resultados esperados com este trabalho, seria interessante conhecer os processos de construção conceitual por estudantes que estão inseridos em cenários muito diferentes daquele proposto pelo professor, a fim de servir de comparação. Por isso, destaca-se a importância e a relevância de outros trabalhos buscarem solidificar os conhecimentos a respeito de Geometria Esférica.

Referências

ALMOULOUD, S. A. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. *Revista Brasileira de Educação*, São Paulo, n. 27, p. 94 - 108, Set /Out /Nov /Dez 2004.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4. p. 193-217.

BARRETO, M.S. Do mito da Geometria Euclidiana ao ensino das Geometrias Não Euclidianas. *Vértices*. Rio de Janeiro, v. 9, n.1/3, 74-81, jan. 2007.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROLEZZI, A. C. A Tensão entre o Discreto e Contínuo na História da Matemática e no Ensino da Matemática. 1996. Tese (Doutorado em Educação), Universidade de São Paulo, São Paulo.

BROUSSEAU, G. A Teoria das Situações Didáticas e a Formação do Professor. Palestra. São Paulo: PUC, 1996.

CABARITI, E. A geometria hiperbólica na formação docente: possibilidades de uma proposta com o auxílio do cabri-géomètre. III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2006, São Paulo.

COURANT, R.; ROBBINS, H. O que é matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

DAVIS, C.; NUNES, M. M. R.; NUNES, C. A.A. Metacognição e Sucesso Escolar: Articulando Teoria e Prática. *Cadernos de Pesquisa*, v. 35, n. 125, maio/ago. 2005. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/cp/v35n125/a1135125.pdf>>. Acesso em: 10 out. 2013.

D'AMBROSIO, U. Educação matemática: Da teoria à prática. 14^a. ed. São Paulo: Papirus, 2009.

DOUADY, R. Didactique des Mathématiques. *Enciclopédia Universalis*, 1985, p.885-889.

FIORENTINI, Dário; NACARATO, Adair M. Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática: investigando e teorizando a partir da prática. São Paulo: Musa, Campinas: GEPFPM-PRAPEM-FE/UNICAMP, 2005.

LEIVAS, J.C.P. Educação geométrica: reflexões sobre ensino e aprendizagem em geometria. *Revista SBEM-RS*, Porto Alegre, no. 13, v.1, p. 9-16, 2012.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). Educação Matemática: Uma introdução. 2 ed. São Paulo: Educ., 2002. p. 197-208.

MLODINOW, L. A janela de Euclides: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. São Paulo: Geração, 2010.