

VISUALIZAÇÃO OU ILUSÃO ÓTICA: o que dizem os mestrandos¹

VISUALIZATION OR OPTICAL ILLUSION: what master students say

José Carlos Pinto Leivas

Resumo

Este trabalho aborda uma pesquisa qualitativa realizada com sete estudantes de um Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática, a qual teve como objetivo investigar como alunos, ao iniciarem uma disciplina de Geometria, interpretavam uma figura de ilusão ótica e uma representação geométrica específica. As habilidades de percepção e representação espacial são relevantes para o investigador na construção de pensamento geométrico e podem ser desenvolvidas, constituindo-se num campo de pesquisa atual. Os dados coletados, por meio de registros escritos dos alunos, mostraram que, mesmo sendo eles professores atuantes na escola básica, a maioria apresenta dificuldades na interpretação de imagens, quer geométricas, quer de ilusão ótica. O artigo finaliza com a sugestão de três atividades que podem ser realizadas para o desenvolvimento dessas habilidades visuais necessárias na formação inicial e continuada de professores.

Palavras-chaves: Visualização. Ilusão ótica. Representação.

Abstract

This paper presents a qualitative research that was conducted with seven students from a Professional Master on Teaching of Mathematics. It aimed to investigate how students, to begin a discipline of geometry, interpreted a figure of optical illusion and a specific geometric representation. Perception's abilities and spatial representation are relevant to the investigator to construct geometric thinking and can be developed, constituting a field of current research. Data were collected by means of written records of students. They showed that, even though they are teachers working in elementary school, most present difficulties in the interpretation of images, whether geometric or optical illusion. The article concludes with the suggestion of three activities that can be realized for develop these visual abilities that are needed in the initial and continuing training of teachers.

Keywords: Visualization. Visual illusions. Representation.

¹ Artigo originado a partir de comunicação apresentada no 21 Encuentro de Geometría y sus aplicaciones de 19 a 21 de junho de 2013 na cidade de Bogotá, Colômbia, em língua espanhola.

Introdução

O artigo emergiu da experiência do investigador em lidar com dificuldades encontradas por estudantes, nos diversos níveis de escolaridade, para interpretar determinadas representações em Matemática, mais acentuadamente em Geometria. Em palestras proferidas, a fim de despertar o interesse dos expectadores pelo tema abordado, muitas vezes, optou-se por iniciá-las com a apresentação de uma dessas imagens que apresentam ilusão ótica. Elas despertam, geralmente, muito interesse e servem para explorar os diversos olhares que se pode ter para a própria área de atuação. Também conduzem a debates sobre os significados que uns e outros atribuem a tais imagens e à Matemática.

Exemplifica-se com a figura 1, a qual apresenta dualidade de interpretação em relação ao número de pernas do elefante. Dependendo do ponto pelo qual o observador entra na imagem, uns dirão que, obviamente, são quatro pernas, por ser um mamífero. Outros, mais atentos às imagens, principalmente aqueles ligados às Artes Visuais, perceberão que, se entrarem na figura acompanhando a tromba do elefante pelo lado direito, ele possui seis pernas.

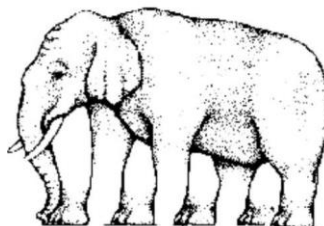


Figura 1. Quantas pernas tem o elefante? Capturada do Google imagens em 19 mai 2013.

Na figura 2, a seguir, encontram-se duas linhas retas que saem do centro da figura. Elas tiram a impressão de serem retas, fazendo com que pareçam curvas.

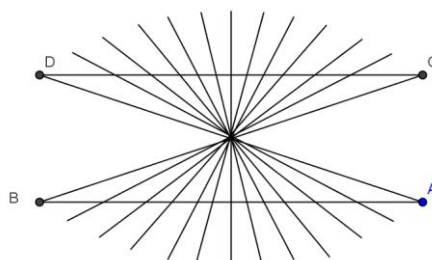


Figura 2. Linhas paralelas e retas. Adaptada de Moise e Downs pelo autor.

As duas imagens, assim como tantas outras, bem como a apresentação do trabalho que deu origem ao artigo, serviram para motivar o pesquisador a escrevê-lo. Nele tratar-se-á, inicialmente, sobre visualização e ilusão ótica, na tentativa de distinguir uma de outra, no sentido de que a primeira é uma imagem, enquanto que a segunda é uma representação matemática.

Pode-se dizer que ilusões óticas e Matemática sempre andaram juntas com as Artes. A história ilustra muitas situações nas quais a ciência auxiliou os artistas em suas obras que geram imagens dúbias, o que não é objetivo deste trabalho. Entretanto, na área artística, o termo utilizado é anamorfose, oriundo do grego, significando “sem forma”. Com essa técnica, podem ser produzidas tais imagens, as quais podem ser apoiadas na perspectiva matemática.

Santos (2011) faz um estudo teórico sobre o uso de anamorfose, no qual uma das aplicações para a Matemática está na relação de representações em sistemas de coordenadas cartesianas e coordenadas polares. Semmer (2013) traz uma investigação sobre como utilizar anamorfose para desenvolver conceitos de geometria projetiva em alunos do ensino médio, de forma interdisciplinar, envolvendo Arte e Matemática, incluindo atividades que podem ser realizadas com pêsankas.

As ilusões óticas têm sido estudadas por psicólogos há longo tempo e indicam que, nem sempre, aquilo que a pessoa vê é o que se pensa que seja. O olhar, ao fixar algum objeto, acostuma-se com o mesmo e o cérebro pode captar alguns indícios dele que não sejam obrigatoriamente verdadeiros. Algumas vezes, ele pode preencher as lacunas existentes, como no caso do elefante, e produzir falsa imagem do objeto, caracterizando, dessa forma, uma ilusão ótica. Esse estudo não é objeto deste artigo.

Pretende-se, neste trabalho, trazer alguns aspectos sobre visualização, como campo de investigação já existente há algum tempo na Educação Matemática e, particularmente, em Geometria. Durante as aulas ministradas pelo investigador, em diversos níveis de ensino, encontraram-se estudantes com dificuldades de interpretar representações geométricas, ou seja, visualizar objetos que estão representados no papel, sejam eles planos ou espaciais. Também foram encontrados professores que não conseguem representar adequadamente entes geométricos para seus estudantes, especialmente as representações de objetos tridimensionais no plano.

Este artigo apresenta uma pesquisa realizada com sete estudantes, todos professores do ensino básico brasileiro, em formação de mestrado, participantes de uma disciplina de Geometria na qual o autor do artigo é o professor responsável.

Entende-se que a pesquisa tem cunho qualitativo, uma vez que analisa a interpretação dos indivíduos ao iniciarem uma disciplina, tratando-se, pois, de um estudo de caso. Apresentou-se a figura 3, clássica nos estudos de ilusão ótica e verificou-se quais foram as interpretações dadas pelos indivíduos. A partir disso, uma representação geométrica foi dada, figura 4. Solicitou-se que a interpretassem. A hipótese era de que os indivíduos teriam dificuldades na interpretação dessa representação geométrica. Assim, a questão de pesquisa foi a seguinte: como os investigados interpretam uma ilusão ótica e uma representação geométrica?

A seguir serão apresentadas algumas considerações sobre o tema visualização e sobre representação para analisar as respostas dadas pelos indivíduos participantes da pesquisa.

Visualização e representação

Piaget e Inhelder (1993), ao tratarem sobre a representação do espaço pelas crianças, concluíram que a percepção espacial não acarreta sua representação. Isso significa que o fato das crianças perceberem sensivelmente o espaço, não é garantia de que elas o saibam representar. Para eles,

a percepção é o conhecimento dos objetos resultante de um contato direto com eles. A representação consiste, ao contrário, - seja ao evocar objetos em sua ausência, seja quando duplica a percepção em sua presença - em completar seu conhecimento perceptivo, referindo-se a outros objetos não atualmente percebidos (p. 32).

Mais além, Piaget e Inhelder (1993) afirmam que a representação do espaço não é dada a priori, ela é construída. Em suas pesquisas, eles verificaram que a criança constrói a representação de espaço de modo inverso ao que geralmente é apresentado na escola. Na Matemática escolar, costuma-se apresentar, primeiramente, noções de Geometria Euclidiana para, somente depois, tratar de Geometria Projetiva (representação de sólidos por meio de perspectivas) e, em último caso, já na Matemática superior, é que é apresentada a topologia (relações de vizinhança, separação, ordem, envolvimento e continuidade).

No que diz respeito ao espaço perceptivo e representativo, os autores concluíram que as imagens dos objetos não resultam unicamente da percepção e que a construção do espaço começa no plano perceptivo, prosseguindo no plano representativo.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), documento que norteia, de certa forma, o ensino básico, o uso do computador permite que sejam criados ambientes de aprendizagem que fazem emergir novas formas de pensar e aprender, uma vez que “[...] desenvolve processos meta cognitivos, na medida em que o instrumento permite pensar sobre os

conteúdos apresentados e as suas formas de representação, levando o aluno a ‘pensar sobre o pensar’ (p. 147).

Para desenvolver esse pensar sobre o pensar e poder perceber e representar os objetos geométricos, é necessário, para o pesquisador, que seja desenvolvida a habilidade de visualização, por diversos caminhos, sejam eles usando as tecnologias computacionais ou outros recursos didáticos pertinentes, como é o caso das anamorfoses, com a Geometria Projetiva ou um software de Geometria Dinâmica.

No século XVII, tempo de Desargues, o método de Geometria Projetiva surgiu, segundo Le Golf (1994), como certa ruptura, se é que houve, com os métodos tradicionais e não foi recebido de imediato, como ocorreu com o método cartesiano, que levaria a uma Geometria Analítica e ao desenvolvimento da Nova Análise. Isso só iria se concretizar, em 1872, quando Felix Klein introduziu em 1872 o conceito de geometria abstrata. A academia se ressentia com a ideia de que a pintura tinha de representar as coisas não como o olho vê, mas como a perspectiva necessária para a razão.

Numa primeira reformulação das normas emanadas pelo *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM (PRINCÍPIOS E NORMAS, 2008), foi dada ênfase ao pensamento visual, identificando “a geometria e sentido espacial”, o que Costa (2000) enfatizou no “uso da visualização e raciocínio espacial para resolver problemas tanto dentro como fora das matemáticas” (p. 162). A norma apontou, ainda, para o uso de visualização e modelação geométrica para resolver problemas.

A habilidade de manejar objetos abstratos de origem concreta é algo conhecido por muitos especialistas e visualização em Matemática, com essa forma de atuar, explicita possíveis representações concretas porquanto desvela relações abstratas interessantes ao fazer do matemático.

Kilpatrick (1994) preconiza que visualização é uma área de pesquisa atual e a pesquisa de Andrade e Nacarato (2004) aponta a tendência de visualização e representação pelo uso da experimentação. Gutierrez e Boero (2006), em trabalhos do *International Group for Psychology of Mathematics Education* (PME), também indicam pesquisas que destacam a íntima relação entre o ensino de Geometria e a imaginação, intuição, visualização e representação espacial no desenvolvimento do pensamento geométrico.

Entendeu-se visualização como “processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos” (LEIVAS, 2009, p. 22). Portanto, ela é uma habilidade que

pode ser desenvolvida nas pessoas, até mesmo para quem não têm o órgão da visão, as quais, mentalmente, formam imagens de objetos geométricos por diversos mecanismos que podem ser utilizados, como os recursos materiais. Assim, é evidente a diferença básica entre a habilidade de visualização, a qual pode ser desenvolvida e as ilusões óticas, que dependem da visão do indivíduo.

Em Matemática, a visualização não tem um fim em si mesma, mas é um meio para um fim, que é sua compreensão, segundo Zimmermann e Cunningham (1990), o que a difere de ilusão ótica. Para Eisenberg e Dreyfus (1990), “embora muitas vezes defendam os benefícios da visualização de conceitos matemáticos, muitos alunos são relutantes em aceitá-los, pois preferem os algoritmos sobre o pensamento visual” (p. 25).

Voltamos ao ilusionismo e às anamorfozes, ou seja, às imagens distorcidas que, pela observação de um ponto onde se localiza o foco do observador, ou por meio de objetos refletores, aparecem reconstituídas aos olhos. A literatura aponta que os primeiros experimentos utilizando essa técnica surgiram no século XV, quando foi utilizada em diversos quadros, murais e afrescos cujas pinturas se confundiam com a arquitetura das paredes. Posteriormente, já no século XVII, foi utilizada a técnica de espelhos, que torna as imagens mais interessantes e difusas para o observador.

Dessa forma, tratar ilusões óticas, em geral, é diferente de tratar de visualização, no sentido matemático das representações geométricas. Acredita-se, como Hoffer (1977), citado por Del Grande (apud LINDQUIST e SHULTE, 1994), que essa é uma habilidade que pode ser desenvolvida. O autor define: “discriminação visual é a habilidade de distinguir semelhanças e diferenças entre os objetos e memória visual é a habilidade de se lembrar com precisão de um objeto que não mais está à vista e relacionar suas características com outros objetos, estejam eles à vista ou não” (p. 159).

A seguir descreve-se a pesquisa propriamente dita.

A pesquisa

Como toda pesquisa deve apresentar um problema e um objetivo claro, a proposta foi investigar como alunos, ao iniciarem uma disciplina de Geometria nem um mestrado profissional em ensino de Matemática, interpretavam uma ilusão ótica e uma representação geométrica.

O objetivo com a atividade era despertá-los para os diversos olhares que o educador matemático deve ter ao cumprir o programa de uma disciplina, no caso presente, desenvolver habilidades de percepção e representação espacial.

A pesquisa foi realizada na primeira aula da disciplina Fundamentos de Geometria do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática do Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, no Rio Grande do Sul, Brasil, em que o autor é o professor responsável e ocorreu no primeiro semestre do ano de 2013. Participaram os sete alunos matriculados, todos eles são professores que atuam em escola básica, pública ou privada, sendo que a formação dos mesmos foi realizada em universidades públicas e também particulares.

A pesquisa de cunho qualitativo, segundo as concepções de Fazenda et al. (2006), em que, nas Ciências Humanas, tem como recurso básico a descrição. “As ciências exatas como as Matemáticas e, especificamente a Geometria, não estão interessadas em formas reais intuitivas através dos sentidos, como estão os pesquisadores descritivos da natureza” (p. 49). Para os autores,

o mérito principal de uma descrição não é sempre a sua exatidão ou seus pormenores, mas a capacidade que ela possa ter de criar uma reprodução tão clara quanto possível para o leitor da descrição. Poderá haver tantas descrições de uma mesma coisa quantas sejam as pessoas especialistas que vejam a mesma coisa. (p. 56)

Numa descrição de ilusão ótica, as pessoas descrevem essas diversas formas, dependendo do olhar no momento em que se apresenta a imagem. Entretanto, em uma representação geométrica, por exemplo, como a da figura 2, entende-se que elementos fundamentais do objeto deveriam ser descritos por professores de Matemática, pois, “a fim de se descrever alguma coisa, precisamos comumente mencionar um número de atributos dessa coisa” (Ibid, p. 57).

Quanto aos procedimentos empregados, foi distribuída uma ficha na qual os alunos deveriam fazer suas anotações, por escrito, e entregar ao professor pesquisador. Orientou-se que cada um respondesse ao solicitado, sem consultar o colega que se encontrava ao seu lado. Projetou-se a clássica figura 3, a seguir, para que observassem e respondessem: o que era visualizado na figura?



Capturada do Google imagens em 19mar2013.

Figura 3. A Moça e a Velha.

Em 1915, W. E. Hill publicou pela primeira vez essa imagem, com a ideia de que é difícil ver o que se deve ver. Ela representa uma garota bonita olhando para longe, mas também pode ser a representação da imagem de uma senhora idosa olhando para o chão. Na realidade, a chave da identificação está na percepção do que se espera ver. Se o observador se concentrar no colar da garota jovem, esse pode representar a boca da idosa. O queixo e as faces da garota representam o nariz da senhora. O protocolo das respostas descritivas dos mestrandos está a seguir.

Quadro 1. Protocolo das descrições dos mestrandos sobre a figura 3².

Estudante 1:	Figura com duas imagens (rosto de duas pessoas, mulheres); uma de cabelo longo e outra de cabelo curto.
Estudante 2:	O rosto de um menino (perfil) submerso na areia (terra) com parte da cabeça coberta por um tecido.
Estudante 3:	Num primeiro momento parece ser o perfil de uma pessoa até acima dos ombros sobre uma espécie de morro coberto por copas de árvores.
Estudante 4:	Rosto de menino; pena; onda.
Estudante 5:	Rosto de perfil; onda.
Estudante 6:	Uma senhora com uma pena na cabeça, casaco de pele e véu na cabeça.
Estudante 7:	Uma pessoa (mulher) de cabelos pretos, com um véu branco.

Verificou-se, a partir do protocolo constante no quadro 1, que apenas um dos investigados respondeu que havia duas imagens. Embora seja uma figura de ilusão ótica e muitas alternativas poderiam ser dadas, as respostas parecem corroborar o que Piaget e Inhelder (1993) indicaram como sendo percepção o conhecimento dos objetos resultante de um contato direto com eles. Isso foi o que ocorreu, pois o investigador nada informou sobre a imagem fornecida aos alunos.

Como a intenção do investigador era verificar se os professores investigados tinham o espaço perceptivo e representativo (visualização) coerentes com o que acreditava ser adequado para o nível de conhecimentos deles e para motivar a sequência do curso que se iniciava, propôs a representação da figura 4, a seguir.

² As transcrições dos alunos são literais.

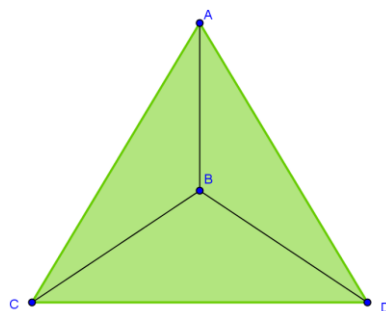


Figura 4. (Triângulos ou Tetraedro). Construção no GeoGebra feita pelo autor.

A experiência e pesquisas do investigador têm mostrado que estudantes e professores não conseguem interpretar (visualizar) e descrever corretamente certas representações geométricas. Também não o fazem de forma convincente. Na maioria das vezes, as representações são fornecidas aos alunos por reproduções xerografadas ou visualizadas em livros didáticos ou meios digitais. Além disso, descrevem oralmente o que a imagem representa ou que o próprio professor deseja que ela represente, o que vai de encontro ao que Fazenda et al. (2006) afirmam sobre descrição, não desenvolvendo nos indivíduos habilidades visuais, pois eles passam a “ver” com o olhar do professor e não pela própria construção.

Quadro 2. Protocolo das descrições da figura 4.

Estudante 1:	Figura geométrica composta por mais três figuras; três vértices, três lados, ângulos, figura plana, figura espacial.
Estudante 2:	Uma pirâmide de base triangular ACD.
Estudante 3:	Um triângulo de medidas laterais iguais e com um centro marcado pelo ponto B, dando uma ideia de profundidade para observar as faces laterais e a base da figura.
Estudante 4:	Vértices; segmentos de reta; triângulos.
Estudante 5:	Pirâmide de base triangular; pontos; vértices; faces laterais.
Estudante 6:	Um tetraedro; um triângulo com o seu centro marcado. Três triângulos.
Estudante 7:	Primeiramente seria um tetraedro, onde a base é o triângulo BCD e vértice A. Mas para isso deveríamos ter as arestas BC e BD pontilhadas e não contínuas, para imaginarmos um sólido e não 3 triângulos ABC, BCD e ABD com o vértice B em comum.

O protocolo anterior indica que os estudantes visualizam uma representação de objeto espacial e não uma possibilidade de representação formada exclusivamente por triângulos planos.

A figura 4 poderia estar representando quatro triângulos planos: ABC, ABD, BCD, ACD, sendo que o último não foi reconhecido por nenhum dos alunos, nem mesmo pelo estudante 7, que melhor discorreu sobre a representação. Esse estudante cogita de ser um tetraedro, mas para tal exige que as arestas deveriam ser pontilhadas, o que não é correto para essa situação, pois todas as arestas seriam visíveis.

O estudante 6 é o único que indica a possibilidade de a representação ser de um objeto plano e também de um espacial. Ao afirmar que há três triângulos representados, não considera o triângulo ACD, que, no caso da representação ser de tetraedro, corresponderia à face lateral que se encontra invisível.

O estudante 5 visualiza objeto espacial, apenas citando elementos constituintes do mesmo e não o descreve, de forma similar ao feito pelo estudante 4, enquanto que o de número 2 percebe a representação de uma pirâmide, vista de cima, em que visualiza a base como o triângulo ACD e vértice B.

Os estudantes 1 e 3 percebem na representação a presença de uma figura espacial e indicam elementos constituintes da mesma.

Concluindo

Ao término do artigo indica-se que a análise dos protocolos com a descrição feita pelos investigados pode indicar que eles apresentam alguma percepção de representações geométricas, estando mais presentes as de objeto espacial. Acredita-se que isso tem a ver com o fato dos interiores das regiões triangulares terem sido pintados e não apenas pelos segmentos da fronteira, caso em que ficaria mais evidente a representação de polígonos e não regiões poligonais. Este é um ponto a ser investigado em pesquisas futuras.

Por sua vez, fica evidente a afirmação de Piaget e Inhelder (1993) de que a representação do espaço não é dada a priori, mas é construída e que difere da percepção, que é imediata. Além disso, a visualização, por não ter fim em si mesma e, sim, ser um meio para alcançar esse fim, ou seja, a compreensão e o desenvolvimento visual, nas palavras de Zimmermann e Cunningham (1990), a difere de ilusão ótica.

Existem representações geométricas, como a das figuras 5, 6 e 7, a seguir, que parecem auxiliar na aquisição dessas habilidades visuais. Na primeira delas, o comprimento vertical, à primeira vista, parece muito maior do que o horizontal, entretanto os dois são de mesmo comprimento, como pode ser verificado por medições. Nesse sentido, o uso das tecnologias

computacionais poderia ser uma ferramenta para auxiliar no desenvolvimento da habilidade visual, comprovando as hipóteses formuladas com construções geométricas adequadas.

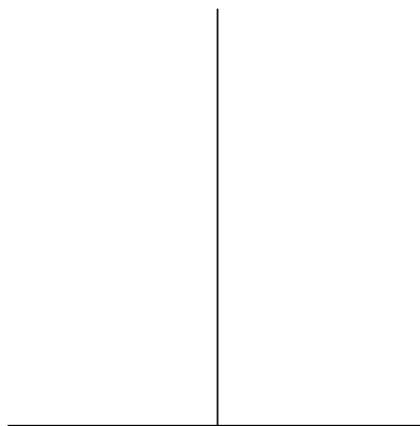


Figura 5. Linha vertical aparentando ser mais comprida do que a horizontal. Construção do autor.

Os três quadrados apresentados na figura 6 têm a mesma medida de lado. Entretanto, as divisões feitas pelos três tipos de linhas dão a impressão errada de que possuem medidas diferentes para os lados. Colocando-se um abaixo do outro, a ilusão de qual é o maior é diferente da disposição na figura. Novamente, construções geométricas, ou utilizando tecnologias computacionais, ou com régua, esquadro e compasso podem proporcionar as comprovações ou refutações do observador.

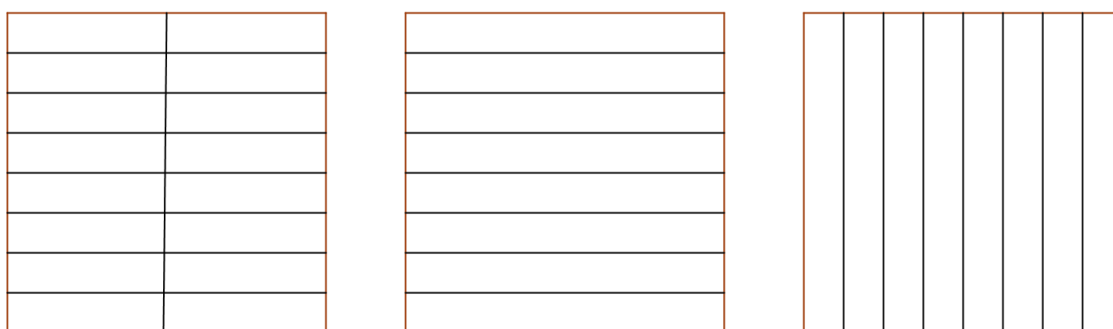


Figura 6. Quadrados. Adaptado pelo autor de Luckiesh (1965).

Na figura 7, a seguir, considera-se a distância horizontal entre os pontos exteriores às três circunferências, arranjadas tangencialmente, e a distância (o espaço vazio) entre a circunferência superior e a da esquerda do grupo das três. Ilude-se aquele que interpretar como sendo maior a

distância vertical do que a horizontal, pois ambas apresentam o mesmo valor, novamente podendo ser utilizados recursos materiais ou computacionais para a comprovação.

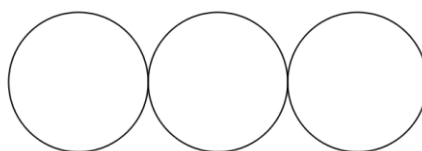
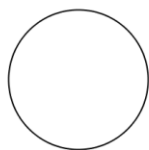


Figura 7. Circunferências. Adaptado pelo autor de Luckiesh (1965).

Entende-se que os aspectos visuais, como construtos mentais, apresentam lacunas na formação inicial dos indivíduos, as quais não mais deveriam existir para o nível de formação em que os investigados se encontram. A pesquisa evidenciou que é necessário desenvolver a habilidade de visualização, conforme as investigações feitas por Hoffer (1977) sobre discriminação e memória visual nos estudantes, ao longo de sua formação inicial, acadêmica e em ação continuada, para que possam desenvolver representação em Geometria.

Referências

- ANDRADE, J. A. ; NACARATO, A.M.. Tendências didático-pedagógicas no ensino de geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. **Educação Matemática em Revista**, 17, 61-67, 2004.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- COSTA, Conceição. **Visualização, veículo para a educação em geometria**. 2000. Disponível em: <<http://www.spce.org.ptsemCC.pdf>> . Acesso em: 29 jul. 2007

EIZENBERG, T.; DREYFUS, T. On the reluctance to visualize in mathematics. **In:** Visualization in teaching and learning mathematics. ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (ed.). USA: Mathematical Association of America, 1990, pp.25-37.

FAZENDA, I. et al. **Metodologia da pesquisa educacional**.-10. ed.- São Paulo: Cortez, 2006.

GUTIERREZ, A.; BOERO, P.. **Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future**. Rotterdam: Sense Publishers, 2006.

DEL GRANDE, J. J. Percepção espacial e geometria primária. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Orgs.). **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual, 1994. p. 156-167.

KILPATRICK, J.. Investigación em educación matemática: su historia y algunos temas *de* actualidad. In: KILPATRICK, J.; RICO, L.; GÓMEZ, P. (Eds.). **Educación Matemática**. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1994. pp.1-18

LEIVAS, J.C.P.. **Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática**. Tese de Doutorado em Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009, 294p.

LE GOLF, J.P. Desargues et la naissance de la géométrie projective. **In:** Desargues en son temps. Paris: Éditions Albert Blanchard, 1994, pp. 157-206.

LUCKIESH, M. **Visual illusions: their causes, characteristics & applications**. New York: Dover Publications, 1965.

PIAGET, J.; INHELDER, B.. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PRINCÍPIOS e Normas para a Matemática Escolar. Lisboa: APM, 2008. Tradução dos Principles and Standards for School Mathematics, NCTM.

SANTOS, L. T. dos. **Anamorfoses no ensino de Matemática**. Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação. Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, 2011, p. 44.

SEMMER, S. **Ensino de Geometrias Não-Euclidianas usando Arte e Matemática**. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2013, 184 p.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. **Visualization in teaching and learning mathematics**. USA: Mathematical Association of America, 1990.