

USO DO ORIGAMI PARA CONSTRUÇÃO DO HEPTÁGONO E DO ENEÁGONO

FOLDING REGULAR HEPTAGON AND NONAGON

Luiz Claudio de Souza Passaroni¹
Francisco Roberto Pinto Mattos²
Patrícia Nunes da Silva³
Renata Cardoso Pires de Abreu⁴

Resumo

Nesse artigo, apresentamos a construção do heptágono e eneágono regulares utilizando o origami, técnica japonesa de dobrar papel. A chave de nossa construção é a possibilidade de encontrar raízes de equações de terceiro grau através do origami. Além de apresentar o processo construtivo em si, nós o analisamos matematicamente através de um diálogo entre álgebra e geometria. O ponto de partida deste diálogo são os seis Axiomas de Huzita, primeiro tratamento matemático formal das construções feitas por origami. A relação entre o sexto axioma e as equações cúbicas já foi explorada por outros autores na construção do heptágono regular. Neste artigo, explorando simetrias dos polígonos e propriedades de certos polinômios, estendemos o uso do sexto axioma para justificar também a construção do eneágono regular.

Palavras-chave: Origami. Axiomas de Huzita. Heptágono. Eneágono. Polígonos regulares.

Abstract

In this paper, we construct the regular heptagon and the regular nonagon by Origami. We use the six Huzita's Axioms, first attempt to describe what types of geometric constructions are possible with Origami. Each axiom prescribes a rule for constructing a single fold by aligning one or more combinations of points and lines. Using this set of axioms, we review the construction of a regular heptagon and present a new construction of a regular nonagon. From an algebraic point of view, Huzita's 6th axiom involves solving third degree polynomial equations. We combine this algebraic feature with geometrical symmetries to construct the regular heptagon and the regular nonagon.

Key words: Origami. Huzita's Axioms. Heptagon. Nonagon. Regular polygons.

¹ Mestrado em Matemática - PROFMAT pela Universidade do Estado do Rio de Janeiro - PROFMAT UERJ-Maracanã

² Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação pela Universidade Federal do Rio de Janeiro - CAP-UERJ/CP II

³ Doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas. - Departamento de Análise Matemática, UERJ

⁴ Mestrado em Ciências Computacionais pelo IME- UERJ - Professora Colégio Santo Agostinho

Introdução

A afirmação de que o heptágono e o eneágono regulares não são construtíveis só é verdadeira quando nos referimos à construção com régua e compasso. Apresentaremos a construção desses polígonos utilizando o origami como ferramenta de construção.

A chave de nosso argumento é a possibilidade de encontrar raízes de equações de terceiro grau através do origami. Além de apresentar o processo construtivo em si, nós o analisamos matematicamente através de um diálogo entre álgebra e geometria. O ponto de partida deste diálogo são os Axiomas de Huzita, o primeiro tratamento matemático formal das construções feitas por origami. A relação entre o sexto axioma e as equações cúbicas já foi explorada por outros autores na construção do heptágono regular. Neste artigo, explorando simetrias dos polígonos e propriedades de certos polinômios, estendemos o uso do sexto axioma para justificar também a construção do eneágono regular.

O estudo das construções de polígonos com régua e compasso sempre despertou grande interesse dos matemáticos. Os Elementos de Euclides apresentam a construção, com régua e compasso, para os polígonos de 3, 4, 5, 6, 8, 10 e 15 lados. A lista de Euclides suscita algumas perguntas: por que há polígonos ausentes na lista? É possível construir algum dos polígonos ausentes? Como fazer essas construções?

Em 1796, Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)⁵ respondeu definitivamente a essas questões caracterizando os polígonos construtíveis com o emprego de instrumentos euclidianos (régua não graduada e compasso). Gauss utilizou apenas argumentos algébricos, relacionando a possibilidade de construção de um polígono de n lados com as soluções complexas da equação $Z^n = 1$, cujas n raízes são os vértices do polígono.

Teorema de Gauss⁶: Sejam α e β números inteiros não negativos. Um polígono regular de n lados pode ser construído com régua e compasso se, e somente se, $n = 2^\alpha$ ou $n = 2^\alpha p_1 p_2 \dots p_n$, em que p_1, p_2, \dots, p_n são números primos distintos e cada um deles é da forma $2^{2^\beta} + 1$, para algum inteiro não negativo β .

O Teorema de Gauss nos mostra que os polígonos regulares com número primo de lados são construtíveis se o número de lados for um primo de Fermat, isto é, se ele puder ser escrito como $2^{2^\beta} + 1$, para algum inteiro não negativo β . Segue daí a impossibilidade de construção do

⁵ Nascido em Brunswick, Alemanha, Gauss se dedicou à álgebra, teoria dos números, equações diferenciais, cartografia e muitas outras áreas das ciências exatas. Em 1796, foi o primeiro a construir um polígono regular de dezessete lados somente com régua e compasso e, em 1798, demonstrou, em sua tese de doutorado, o “Teorema fundamental da Álgebra”, provando que toda equação polinomial $f(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz real ou imaginária baseando-se em considerações geométricas. (FERNANDES, 2011)

⁶ PEDROSO e PRECIOSO (2009).

heptágono regular, uma vez que $7 = 6 + 1$ e 6 não pode ser escrito como uma potência de 2. Já a impossibilidade de construção do eneágono regular vem do fato que ao escrever $9 = 2^0 \cdot 3 \cdot 3$, como um produto com primos de Fermat, não se cumprir a exigência de eles serem distintos. Sendo assim, o heptágono e o eneágono regulares não são construtíveis com régua e compasso. No entanto, eles podem ser construídos através do origami.

Na construção do eneágono, ao invés de recurso usual ao origami para realizar a trisseção de um ângulo, apresentamos uma nova justificativa e procedimento construtivo. Construímos o eneágono através da resolução de uma equação cúbica por Origami. O detalhamento dos conceitos algébricos envolvidos nas construções, fundamenta o uso da técnica de construção por origami, tanto pelo viés algébrico, como pelo viés geométrico.

Na seção Construções por Origami, apresentamos os Axiomas de Huzita. Eles serão utilizados para fundamentar matematicamente as construções apresentadas. Além disso, destacamos e detalhamos a relação entre o sexto axioma de Huzita e as equações cúbicas. Essa relação será crucial para construção do heptágono e eneágono. Na seção Fundamentação Algébrica da Construção do Heptágono e Eneágono Regulares, tratamos inicialmente a construção dos polígonos de uma perspectiva algébrica. Em seguida, exploramos a simetrias dos polígonos e propriedades de certos polinômios a fim de reduzir o problema de construção dos polígonos (heptágono e eneágono) à resolução de uma equação cúbica. Resolvemos as equações cúbicas através do origami ao longo da construção dos polígonos. Ao final, apresentamos uma breve reflexão sobre os conceitos, resultados e estratégias adotadas no trabalho.

Construções por Origami

Durante muito tempo o origami foi conhecido simplesmente como a arte japonesa de construir figuras de objetos e animais com dobradura de papel. Este panorama começou a mudar com a publicação de livros sobre origami com enfoque matemático, como o livro japonês *Wakoku Chiyekurabe de Kan Chu Sen*, de 1721, primeiro livro a abordar as dobraduras origami sob um contexto matemático, e o livro *Exercises in paper folding* de T. Sundara Row, publicado em 1893 na Índia.

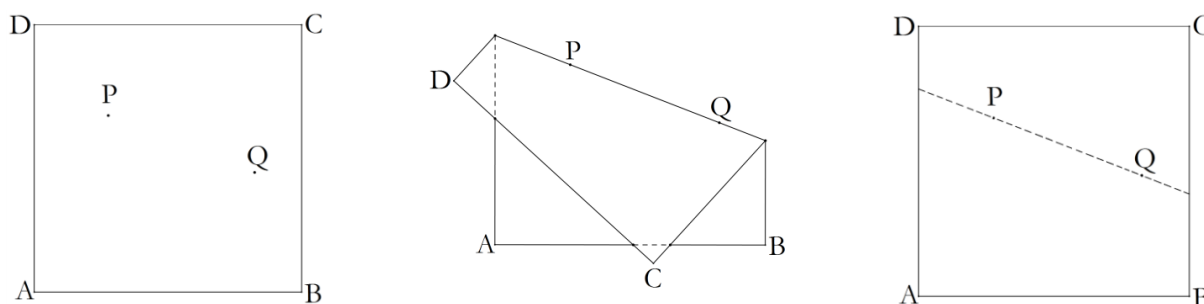
Na década de 70, o matemático japonês Humiaki Huzita apresentou, na Primeira Conferência Internacional sobre Origami em Educação e Terapia, seis operações básicas capazes de definir uma dobra com base no alinhamento ou combinações de alinhamentos entre pontos e retas, sendo essa a primeira descrição formal das construções possíveis com origami que ficaram conhecidas como axiomas de Huzita. Usaremos os axiomas de Huzita para justificar nossas construções do heptágono e o eneágono regulares através do origami.

Axiomas de Huzita

Em uma construção geométrica com régua e compasso, o próprio processo construtivo se constitui em uma justificativa e garantia de obtenção de um objeto com as propriedades desejadas. Isto porquê, estabeleceu-se previamente um repertório de construções auxiliares, como construção da mediatriz, bissetriz, etc, cujas características geométricas são conhecidas e exploradas para obtenção de novos objetos. Os axiomas de Huzita cumprem na formalização das construções por origami o mesmo papel destas construções auxiliares nas construções geométricas. Apresentamos a lista de axiomas de Huzita como descritos por Kasem, Ghourabi e Ida (2011), que reescreveram os axiomas de Huzita de forma a torná-los mais precisos e excluir a existência de casos com infinitas possibilidades de construção.

Axioma 1 – Dados dois pontos distintos P e Q, podemos construir uma única reta que passa por P e Q.

Figura 1 – Construção do Axioma 1

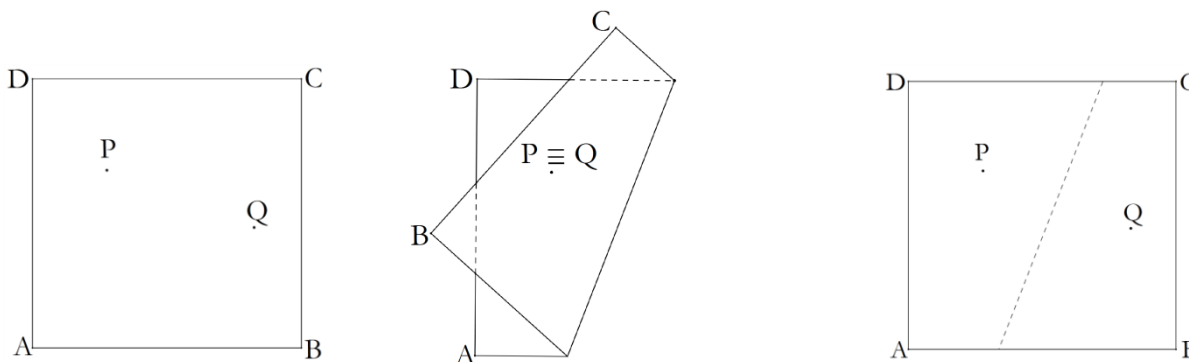


Fonte: Passaroni (2014)

O Axioma 1 nos permite construir a reta (dobra ou vinco) que contém os dois pontos dados, correspondendo à utilização de uma régua.

Axioma 2 – Dados dois pontos P e Q, podemos construir uma única reta, fazendo coincidir P e Q.

Figura 2 – Construção do Axioma 2

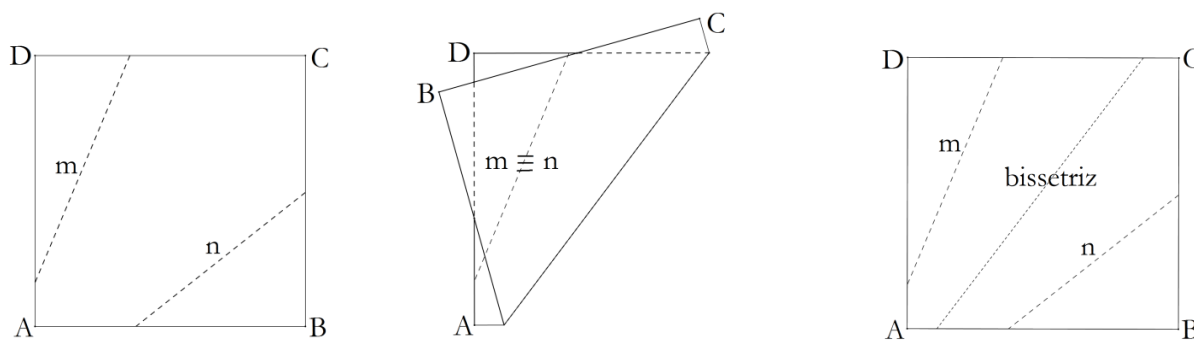


Fonte: Passaroni (2014)

Aplicando o Axioma 2, construímos a reta mediatriz dos pontos dados.

Axioma 3 – Dadas duas retas distintas m e n , podemos obter um número finito de retas fazendo coincidir m e n .

Figura 3 – Construção do Axioma 3

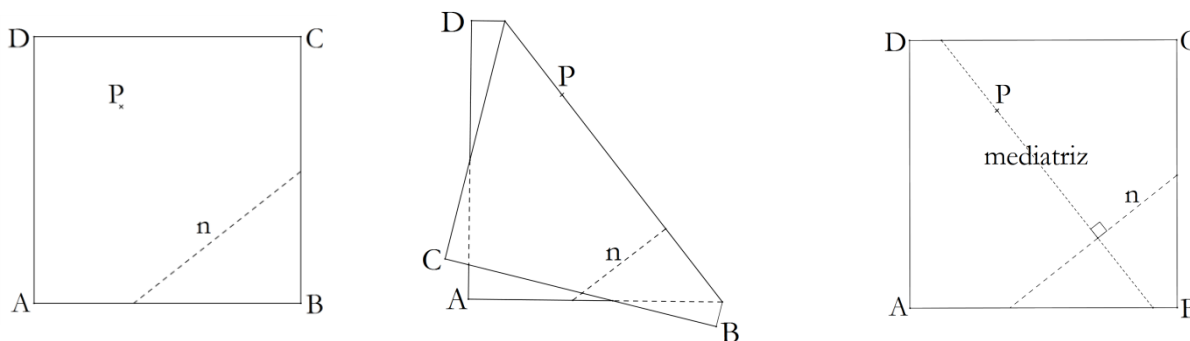


Fonte: Passaroni (2014)

Quando m e n são concorrentes, com o Axioma 3, construímos as bissetrizes dos ângulos formados pelas retas dadas e haverá duas construções possíveis se a intersecção de m e n estiver no papel.

Axioma 4 – Dada uma reta n e um ponto P , podemos obter uma única reta que passa por P , fazendo coincidir n com ela mesma.

Figura 4 – Construção do Axioma 4

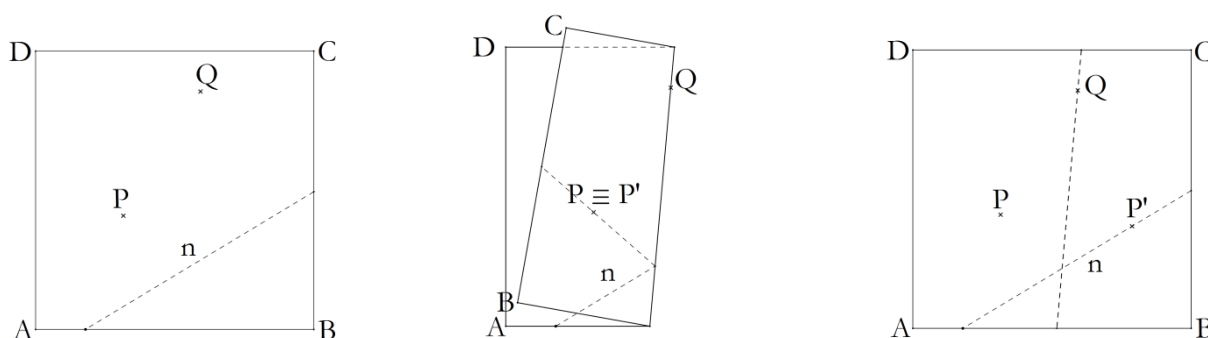


Fonte: Passaroni (2014)

Observando as sobreposições de ângulos, é fácil notar que essa construção nos permite marcar a perpendicular à reta n que passa pelo ponto dado.

Axioma 5 – Dada uma reta n , um ponto P não pertencente a n , e um ponto Q , podemos construir um número finito de retas que passam por Q , ao fazermos P coincidir com n ou a construção é impossível.

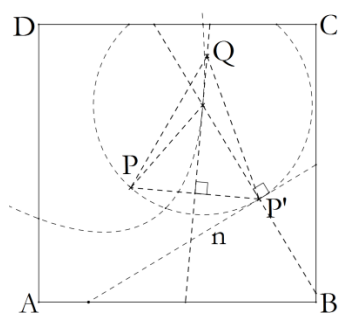
Figura 5 – Construção do Axioma 5



Fonte: Passaroni (2014)

Cada reta, construída no Axioma 5, contém o ponto Q e é uma tangente à parábola de foco P e diretriz n.

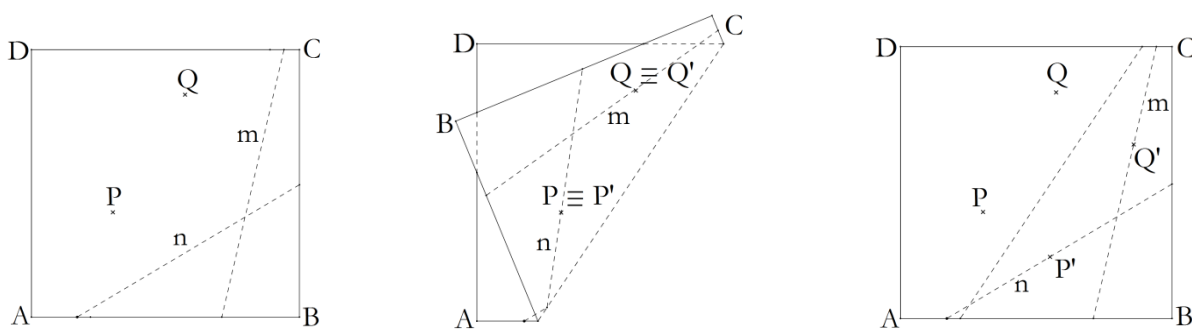
Figura 6 – Propriedade do Axioma 5



Fonte: Passaroni (2014)

Axioma 6 – Dados os pares, ponto P e reta m, e ponto Q e reta n, distintos, onde P e Q não pertencem a m e n, respectivamente, podemos construir um número finito de retas (no máximo três), fazendo coincidir P com m e Q com n, simultaneamente ou a construção é impossível.

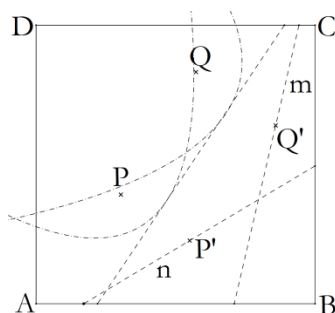
Figura 7 – Construção do Axioma 6



Fonte: Passaroni (2014)

Cada reta construída pelo Axioma 6 é uma tangente comum às parábolas de focos P, Q e diretrizes n , m , respectivamente. De acordo com a posição relativa entre essas parábolas, podemos obter uma, duas ou três dobras pelo Axioma 6 e a construção será impossível quando as retas forem paralelas e a distância entre elas for maior que a distância entre os pontos (uma parábola é interior a outra).

Figura 8: Propriedade do Axioma 6



Fonte: Passaroni (2014)

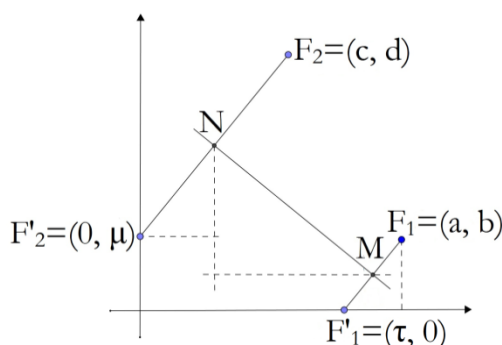
O Axioma 6 e equações de terceiro grau

Veremos, a seguir, como a utilização do Axioma 6 nos permite determinar as soluções reais de equações de terceiro grau da forma $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Iremos expressar algebricamente o processo construtivo subjacente ao Axioma 6 para mostrar que ele está associado a uma equação cúbica. Posteriormente, indicaremos como relacionar a equação obtida com a equação cúbica que queremos resolver. A dedução aqui apresentada do uso do Axioma 6 para resolução de uma equação cúbica é devida a Justin (1989). Os cálculos foram detalhados e justificados pelos autores.

Inicialmente, vamos mostrar que há uma equação cúbica naturalmente associada aos quatro parâmetros (dois pontos e duas retas) do Axioma 6. Para facilitar os cálculos, assumimos que as retas são perpendiculares⁷ e representadas pelos eixos coordenados \vec{Ox} e \vec{Oy} . Sejam $F_1 = (a, b)$ e $F_2 = (c, d)$ dois pontos distintos, não pertencentes respectivamente aos eixos coordenados \vec{Ox} e \vec{Oy} . Fazendo coincidir, simultaneamente, F_1 com \vec{Ox} e F_2 com \vec{Oy} , determinamos, respectivamente, os pontos $F_1' = (\tau, 0)$ e $F_2' = (0, \mu)$.

⁷ O leitor interessado pode consultar em JUSTIN (1989) o tratamento do caso geral.

Figura 9 – Representação do Axioma 6 no plano cartesiano



Fonte: Passaroni (2014)

Na Figura 9 estão representados os pontos F_1 e F_2 , suas reflexões F_1' e F_2' , bem como a dobra construída \overline{MN} . Note que, por construção, M e N são pontos médios respectivamente de $\overline{F_1F_1'}$ e $\overline{F_2F_2'}$. Além disso, \overline{MN} é perpendicular a $\overline{F_1F_1'}$ e $\overline{F_2F_2'}$.

Vamos deduzir uma equação para determinar os possíveis valores de τ . Inicialmente, usaremos o fato de $\overline{F_1F_1'}$ e $\overline{F_2F_2'}$ serem paralelos. A inclinação⁸ de $\overline{F_1F_1'}$ é dada por $\frac{b}{a-\tau}$, a de $\overline{F_2F_2'}$ é dada por $\frac{d-\mu}{c}$. Como $\overline{F_1F_1'}$ e $\overline{F_2F_2'}$ são paralelos, temos $\frac{d-\mu}{c} = \frac{b}{a-\tau}$. Podemos então expressar μ em função de τ . Vamos agora expressar as coordenadas de M e N em função das coordenadas de F_1 e F_2 e de τ . Temos $M = \left(\frac{\tau+a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ já que é ponto médio de $\overline{F_1F_1'}$. Analogamente, $N = \left(\frac{c}{2}, \frac{d+\mu}{2}\right) = \left(\frac{c}{2}, d + \frac{bc}{2(\tau-a)}\right)$.

Vamos calcular a inclinação de \overline{MN} . Observe que \overline{MN} não é perpendicular ao eixo x , já que $F_1 \notin \overrightarrow{Ox}$. Logo, $\frac{\tau+a}{2} \neq \frac{c}{2}$ e a inclinação de \overline{MN} é dada por $\frac{d + \frac{bc}{2(\tau-a)} - \frac{b}{2}}{\frac{c}{2} - \frac{\tau+a}{2}}$. Por outro lado, sabendo que $\overline{F_1F_1'} \perp \overline{MN}$, deduzimos⁹ que a inclinação de \overline{MN} é dada por $-\frac{a-\tau}{b}$. Logo

$$\frac{\tau-a}{b} = \frac{d + \frac{bc}{2(\tau-a)} - \frac{b}{2}}{\frac{c}{2} - \frac{\tau+a}{2}} = \frac{(2d-b)(\tau-a) + bc}{-\tau^2 + a^2 + c\tau - ac}.$$

Portanto,

$$\tau^3 - (a+c)\tau^2 - (a^2 - 2ac - 2bd + b^2)\tau - (-a^3 + a^2c + 2abd - ab^2 - b^2c) = 0 \quad (1)$$

Deste modo, notamos que aplicando o Axioma 6, as abscissas das possíveis reflexões de F_1 sobre o eixo \overrightarrow{Ox} são as soluções da equação cúbica (1).

Para resolver uma equação cúbica da forma

⁸ Note que $a \neq \tau$ e $c \neq 0$ pois F_1 não pertence ao eixo \overrightarrow{Ox} e F_2 não pertence ao eixo \overrightarrow{Oy} .

⁹ Note que $b \neq 0$ pois F_1 não pertence ao eixo \overrightarrow{Ox} .

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad (2)$$

com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, através do Axioma 6, vamos associar a equação (2) à equação cúbica (1). Comparando os coeficientes das duas equações, vemos que para a equação (2) possa ser interpretada como uma equação oriunda da aplicação do Axioma 6, basta escolher reais a, b, c e d , com $bc \neq 0$ tais que

$$\begin{cases} -(a + c) = \alpha \\ -(a^2 - 2ac - 2bd + b^2) = \beta \\ -(-a^3 + a^2c + 2abd - ab^2 - b^2c) = \gamma \end{cases} \quad (3)$$

Feito isto, considere os pares $F_1 = (a, b)$ e \overrightarrow{Ox} e $F_2 = (c, d)$ e \overrightarrow{Oy} e aplique o Axioma 6. Cada solução real de (2) coincide com uma possível abscissa de F_1' .

Fundamentação Algébrica da Construção do Heptágono e Eneágono Regulares

Gauss associou as soluções complexas da equação $Z^n - 1 = 0$ aos vértices de um n -ágono regular inscrito numa circunferência de raio 1 e centro na origem, no plano de Argand-Gauss. Para fundamentar o procedimento que adotaremos na construção do heptágono e eneágono regulares, antes de construí-los, utilizaremos o método de Gauss. Observe que $Z = 1$ sempre é um vértice. Além disso, quando n é ímpar, por simetria, os demais vértices consistem em $\frac{n-1}{2}$ pares formados por complexos e seus respectivos conjugados. Mais precisamente, segue da fatoração $Z^n - 1 = (Z - 1)(Z^{n-1} + Z^{n-2} + \dots + Z + 1)$ que os demais vértices são zeros do polinômio $p(Z) = Z^{n-1} + Z^{n-2} + \dots + Z + 1$. Como os coeficientes de $p(Z)$ são reais, seus zeros aparecem em pares conjugados. Como todos pertencem à circunferência de raio 1 e centro na origem, para determiná-los, basta conhecer a parte real deles. O próximo lema nos ajudará a explorar a estrutura do polinômio p e o fato de que para todo Z na circunferência de raio 1 e centro na origem, $\frac{1}{z}$ é seu complexo conjugado para encontrar a parte real dos zeros de $p(Z)$.

Lema 1 (CONRAD (2016), DICKSON (1908)). Seja $h(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ um polinômio de grau par, com $a_n \neq 0$ e $a_k \in \mathbb{C}$. São equivalentes:

1. Os coeficientes¹⁰ de $h(z)$ satisfazem $a_k = a_{n-k}$, para todo $k = 0, \dots, n$.
2. Existe um polinômio $q(z)$ tal que $h(z) = z^s q\left(\frac{1}{z}\right)$, onde $n = 2s$.
3. Existe um polinômio $g(z)$ de grau s tal que $h(z) = z^s g\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

¹⁰ Polinômios $h(z)$ tais que $a_k = a_{n-k}$, para todo $k = 0, \dots, n$, são chamados palindrômicos.

Note que o grau do polinômio $p(Z) = Z^{n-1} + Z^{n-2} + \dots + Z + 1$ é par pois n é ímpar. Além disso, $p(Z)$ é palindrômico. Pelo item 3, do Lema 1, existe um polinômio g de grau $s = \frac{n-1}{2}$, em $\tau = z + \frac{1}{z}$ tal que $p(Z) = Z^s g\left(Z + \frac{1}{Z}\right)$. Como os zeros de $p(Z)$ pertencem à circunferência de raio unitário e centro na origem, os zeros de $g(\tau)$ correspondem ao dobro das partes reais dos zeros de p . Finalmente, observe que se determinamos os zeros de $g(\tau) = \frac{p(Z)}{Z^s}$, podemos construir o n -ágono regular inscrito na circunferência de raio 2 e centro na origem. Basta tomar como vértices: $Z = 2$ e os pontos da circunferência cujas partes reais coincidam com os zeros de g . Convém notar que na construção por origami, utilizaremos o Axioma 5 para “simular um compasso” e permitir a determinação de tais pontos.

Construção do Heptágono Regular

Para construir o heptágono, vamos refazer o argumento apresentado na seção anterior considerando $n = 7$. Vimos que podemos construir o heptágono regular, determinando as soluções de $Z^7 - 1 = 0$. Já que $Z - 1$ é fator do polinômio $Z^7 - 1 = 0$, vemos que $Z = 1$ é um dos vértices e os demais são soluções de:

$$Z^6 + Z^5 + Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0, \quad (4)$$

Pelo Lema 1, é possível obter um polinômio de grau três em $x = Z + \frac{1}{Z}$ ao dividirmos o polinômio $Z^6 + Z^5 + Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1$ por Z^3 . De fato, dividindo (4) por Z^3 , obtemos:

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{Z^3} = 0,$$

Organizando de maneira conveniente temos;

$$\begin{aligned} Z^3 + \frac{1}{Z^3} + Z^2 + \frac{1}{Z^2} + Z + \frac{1}{Z} + 1 &= 0 \\ \left(Z + \frac{1}{Z}\right)^3 - 3Z - 3\frac{1}{Z} + \left(Z + \frac{1}{Z}\right)^2 - 2 + Z + \frac{1}{Z} + 1 &= 0 \\ \left(Z + \frac{1}{Z}\right)^3 + \left(Z + \frac{1}{Z}\right)^2 - 2\left(Z + \frac{1}{Z}\right) - 1 &= 0. \end{aligned}$$

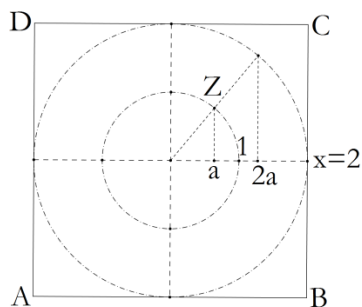
Fazendo a substituição $x = Z + \frac{1}{Z}$, temos uma nova equação:

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (5)$$

Note que as soluções de (5) correspondem ao dobro da parte real dos zeros de $Z^7 - 1 = 0$ distintos de 1 e com elas podemos construir um heptágono inscrito em um círculo de raio dois. Basta tomar como vértices: $Z = 2$ e os pontos da circunferência cujas partes reais coincidam com os zeros de (5). Por isso, na construção por Origami, vamos duplicar o raio do círculo do plano de

Argand-Gauss e, sendo assim, utilizaremos uma folha e papel de lado quatro. Neste quadrado de lado dois, vamos considerar seu centro como a origem de um sistema de coordenadas retangulares de modo que possamos imaginar um círculo de raio dois centrado na origem inscrito na folha de papel e vamos determinar as soluções de (5) através do Axioma 6. Com a ampliação do círculo, associaremos a solução $Z = 1$ de $Z^7 - 1 = 0$ a $x = 2$ e tomaremos o vértice $V_1 = (2, 0)$.

Figura 10 – Associação de $Z=1$ à duplicação do lado do papel origami



Fonte: Passaroni (2014)

Para aplicar o Axioma 6, precisamos indicar quatro parâmetros (dois pontos e duas retas). Utilizaremos como retas os eixos cartesianos que introduzimos na folha de papel. Resta indicar as coordenadas dos dois pontos. Como queremos usar o Axioma 6, para resolver a equação (5), vamos usar o sistema (3) para escolher convenientemente esses dois pontos. Isto é, vamos considerar $F_1 = (a, b)$ e $F_2 = (c, d)$ tais que suas coordenadas satisfazem $bc \neq 0$ e

$$\begin{cases} -(a + c) = 1 \\ -(a^2 - 2ac - 2bd + b^2) = -2 \\ -(-a^3 + a^2c + 2abd - ab^2 - b^2c) = -1 \end{cases}$$

Para reduzir a quantidade de variáveis, considere $a = 0$, obtendo assim o sistema:

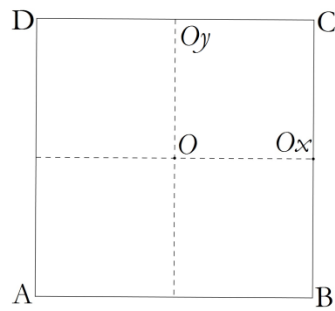
$$\begin{cases} c = -1 \\ -(-2bd + b^2) = -2 \\ b^2c = 1 \end{cases}$$

Verificamos que podemos tomar $b = \pm 1$. Com a escolha¹¹ $b = 1$, obtemos $d = -\frac{1}{2}$. Dessa forma, aplicaremos o Axioma 6, considerando o ponto $F_1 = (a, b) = (0, 1)$ e a reta \overleftrightarrow{Ox} e o ponto $F_2 = (c, d) = (-1, -\frac{1}{2})$ e a reta \overleftrightarrow{Oy} .

Aplicando o Axioma 2 entre A e D, e entre os pontos A e B, construiremos as mediatrizes dos lados \overline{AD} e \overline{AB} que representam os eixos \overleftrightarrow{Ox} e \overleftrightarrow{Oy} , respectivamente.

¹¹ A escolha $b = -1$ altera o valor de d sem inviabilizar a construção.

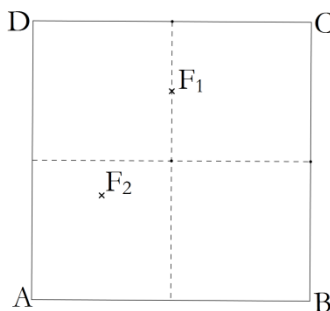
Figura 11 – Marcação dos eixos coordenados no papel origami



Fonte: Passaroni (2014)

Fazer o lado \overline{CD} coincidir com o eixo \overrightarrow{Ox} marcando, sobre o eixo \overrightarrow{Oy} , o ponto $F_1 = (0, 1)$.
 Desdobrar e tornar a dobrar, fazendo coincidir o ponto médio de \overline{AB} com F_1 e \overline{AD} com \overrightarrow{Oy} ,
 marcar o ponto $F_2 = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

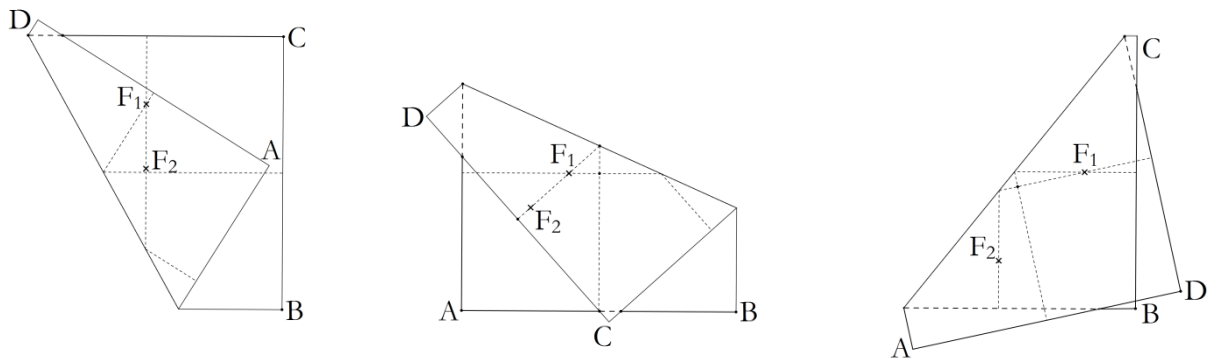
Figura 12 – Construção dos focos



Fonte: Passaroni (2014)

Aplicando o Axioma 6, fazer coincidir F_1 e F_2 com \overrightarrow{Ox} e \overrightarrow{Oy} , respectivamente. Essa dobra pode ser executada de três maneiras distintas, como indicado na figura 13.

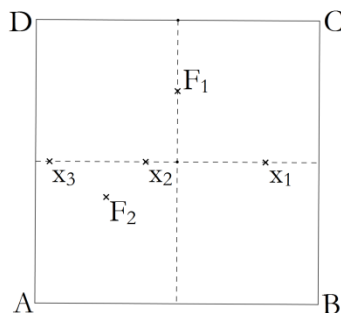
Figura 13 – Aplicações do axioma 6



Fonte: Passaroni (2014)

Para cada dobra possível marcamos os pontos x_1, x_2 e x_3 , onde F_1 coincide com \overrightarrow{Ox} . Note que eles são as abscissas dos vértices do heptágono inscrito em uma circunferência de raio dois centrada na origem e que tem $V_1 = (2, 0)$ como um de seus vértices.

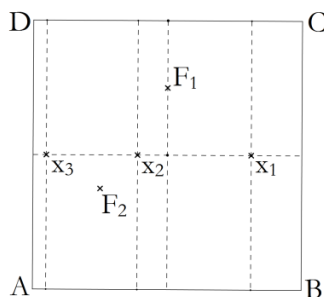
Figura 14 – Construção dos pontos x_1, x_2 e x_3



Fonte: Passaroni (2014)

Utilizando o Axioma 4, construir segmentos perpendiculares ao eixo \overrightarrow{Ox} e que contêm os pontos x_1, x_2 e x_3 .

Figura 15 – Construção dos segmentos que contêm os vértices

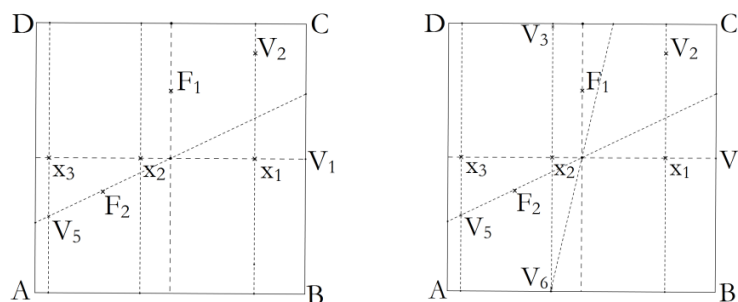


Fonte: Passaroni (2014)

Passaremos a construir os vértices do heptágono regular. Tomando o ponto médio de \overline{BC} como o primeiro vértice V_1 e, aplicando o Axioma 5, construir a reta que contém a origem O fazendo coincidir V_1 com a perpendicular que contém x_1 . O ponto V_1 intersecta a perpendicular no ponto V_2 , uma vez que essa dobradura substitui a construção de um arco de centro O e raio $\overline{OV_1}$. Note que a reta construída intersecta a perpendicular que contém x_3 em V_5 .

Construir a reta que passa por O fazendo V_2 coincidir com a perpendicular que contém x_2 (Axioma 5). O ponto onde V_2 coincide com a perpendicular será o vértice V_3 e a reta construída intersecta a perpendicular que contém x_2 no ponto que será o vértice V_6 .

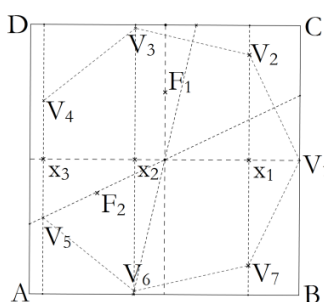
Figura 16 – Construção dos vértices



Fonte: Passaroni (2014)

Para marcarmos os vértices restantes, fazemos as reflexões de V_2 e V_5 em relação ao eixo \overrightarrow{Ox} determinam os vértices V_7 e V_4 , respectivamente. Temos marcados os vértices do heptágono e podemos, pelo Axioma 1, construir seus lados formando o heptágono regular, como mostra a figura 17.

Figura 17 – Heptágono regular



Fonte: Passaroni (2014)

Construção do Eneágono regular

Da mesma forma que fizemos anteriormente, podemos analisar os vértices do eneágono como as soluções complexas do polinômio $Z^9 - 1 = 0$ e sabendo que $Z = 1$ é uma solução, temos

$$(Z^8 + Z^7 + Z^6 + Z^5 + Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1)(Z - 1) = 0$$

Devemos determinar as demais raízes. Note que $Z^8 + Z^7 + Z^6 + Z^5 + Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1$ é um polinômio palindrômico de grau par e podemos fazer as mesmas transformações descritas anteriormente. Dividindo por Z^4 , obtemos

$$Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{Z^3} + \frac{1}{Z^4} = 0$$

Organizando de maneira adequada, vem

$$\left(Z + \frac{1}{Z}\right)^4 + \left(Z + \frac{1}{Z}\right)^3 - 3\left(Z + \frac{1}{Z}\right)^2 - 2\left(Z + \frac{1}{Z}\right) + 1 = 0$$

Substituindo $\left(Z + \frac{1}{Z}\right) = x$, temos

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$$

É fácil ver que $x = -1$ é uma solução. Podemos fazer a fatoração e obter:

$$(x + 1)(x^3 - 3x + 1) = 0 \quad (5)$$

Note que as soluções de (5) correspondem ao dobro da parte real dos zeros de $Z^9 - 1 = 0$ distintos de $Z = 1$ e com elas podemos construir um eneágono inscrito em um círculo de raio dois. Para determinar as soluções da equação cúbica $x^3 - 3x + 1 = 0$, utilizaremos novamente o Axioma 6. Precisamos indicar quatro parâmetros (dois pontos e duas retas). Utilizaremos como retas os eixos cartesianos que introduzimos na folha de papel. Resta indicar as coordenadas dos dois pontos. Vamos usar o sistema (3) para escolher convenientemente esses dois pontos. Isto é, vamos considerar $F_1 = (a, b)$ e $F_2 = (c, d)$ tais que suas coordenadas satisfazem $bc \neq 0$ e

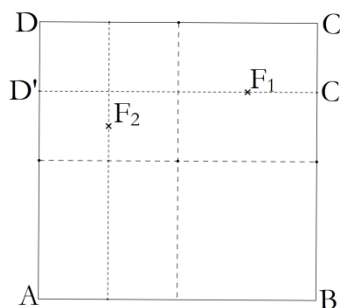
$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a^2 - 2ac - 2bd + b^2 = 3 \\ -a^3 + a^2c + 2abd - ab^2 - b^2c = -1 \end{cases}$$

Fazendo $a = 1$, temos $c = -1$ e $b = \pm 1$. Adotando $b = 1$, obtemos $d = \frac{1}{2}$. Assim, determinamos os focos $F_1 = (1, 1)$ e $F_2 = (-1, \frac{1}{2})$. Pelos mesmos argumentos apresentados para o heptágono, utilizaremos uma folha de papel quadrada de lado quatro.

Para marcar os eixos coordenados \vec{Ox} e \vec{Oy} (Figura 11), aplicaremos o Axioma 2 entre A e D, e entre os pontos A e B, construiremos as mediatrizes dos lados \overline{AD} e \overline{AB} , respectivamente.

Fazer o lado \overline{AD} coincidir com o eixo \vec{Oy} , marcamos a reta $x = -1$. Coincidindo o lado \overline{CD} com o eixo \vec{Ox} , marcando o segmento $\overline{C'D'}$, e o lado \overline{BC} como o eixo \vec{Oy} , obtemos com a intersecção dessas dobras, o ponto $F_1 = (1, 1)$. Desdobrar e dobrar novamente, fazendo coincidir $\overline{C'D'}$ com \vec{Ox} e marcando o ponto $F_2 = (-1, \frac{1}{2})$, intersecção dessas dobras com a reta $x = -1$, como indica a Figura 18, abaixo.

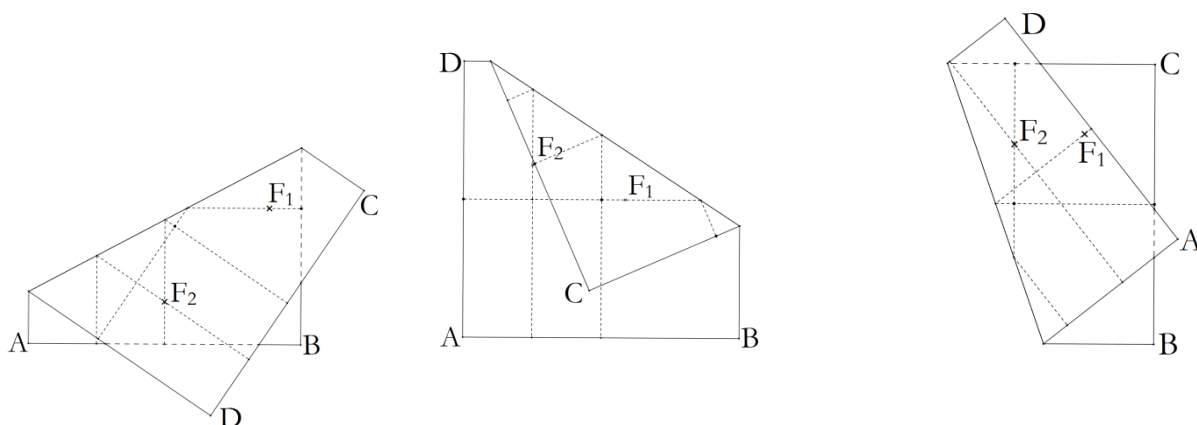
Figura 18 – Construção de F_1 e F_2



Fonte: Passaroni (2014)

Utilizando o Axioma 6, devemos fazer coincidir F_1 e F_2 com \vec{Ox} e \vec{Oy} , respectivamente. Lembrando que existem três dobras distintas.

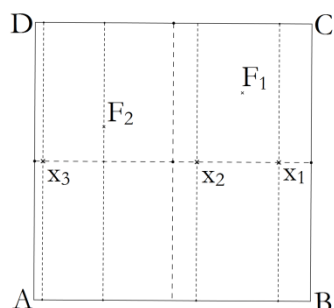
Figura 19 – Aplicação do axioma 6



Fonte: Passaroni (2014)

Os pontos x_1 , x_2 e x_3 , onde F_1 coincide com \overrightarrow{Ox} são os pontos que correspondem a abscissas de vértices do eneágono. Mais precisamente, eles são abscissas de seis vértices do eneágono inscrito em um círculo de raio dois, centrado na origem e que tem $V_1 = (2, 0)$ como um de seus vértices. Construindo, pelo Axioma 4, as perpendiculares ao eixo \overrightarrow{Ox} que passam por eles, podemos determinar as localizações dos vértices, basta simularmos um compasso, aplicando o Axioma 5, para obter a interseção do círculo de raio dois e as perpendiculares traçadas.

Figura 20 – Construção dos segmentos que contêm os vértices

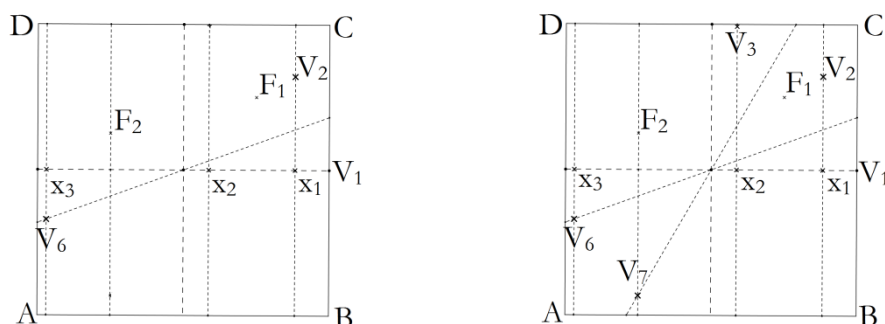


Fonte: Passaroni (2014)

Como visto anteriormente, o ponto médio de \overline{BC} será o primeiro vértice V_1 . Aplicando-se o Axioma 5, construir a reta que contém O , fazendo coincidir V_1 com a perpendicular que contém x_1 . O ponto V_1 intersecta a perpendicular no ponto V_2 e a reta construída intersecta a perpendicular que contém x_3 em V_6 .

Fazendo V_2 coincidir com a perpendicular que contém x_2 , aplicando o Axioma 5, construir uma dobra que passa por O . V_2 coincide com a perpendicular que contém o ponto x_2 no vértice V_3 e a reta construída intersecta a reta $x = -1$ no ponto que será o vértice V_7 .

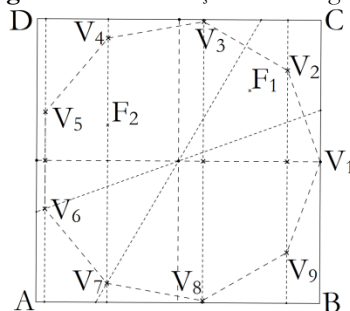
Figura 21 – Construção dos vértices do Eneágono



Fonte: Passaroni (2014)

Fazendo as reflexões de V_2 , V_3 , V_6 e V_7 , em relação ao eixo \overrightarrow{Ox} , determinam, respectivamente, os vértices V_9 , V_8 , V_5 e V_4 . Marcados os vértices, aplicando o Axioma 1, construímos os lados do eneágono regular.

Figura 22 – Construção do Eneágono



Fonte: Passaroni (2014)

Conclusão

Construímos dois polígonos regulares, o heptágono e o eneágono, que não são construtíveis com régua e compasso, mas construtíveis ao aplicarmos os conhecimentos matemáticos associados ao Origami. O ensino da matemática é favorecido quando utilizamos novas metodologias e, neste artigo, o origami cumpre esse papel. As construções apresentadas mostram o origami como um material concreto, lúdico, manipulável e de fácil acesso, como um recurso capaz de resolver problemas. As construções apresentadas exploram o viés algébrico de resolução construtiva de equações de terceiro grau bem como o viés geométrico de verificação através de sobreposições e dobras da efetiva regularidade dos polígonos construídos.

A construção do heptágono, aqui apresentada, aparece em alguns trabalhos sobre Origami (HUZITA (1994), MATTOS (2001), PASSARONI (2014)) e repousa fortemente na possibilidade de resolver através do Origami equações de terceiro grau. A construção do eneágono regular através do Origami, por sua vez, utiliza em geral a trissecção de um ângulo por Origami (HUZITA (1994),

PASSARONI (2014)). Neste artigo, apresentamos a possibilidade de utilizar a resolução de equações de grau três por Origami também na construção de eneágono. Desse modo, fomos capazes propor uma nova construção do eneágono regular através do Origami e de realizar a construção desses dois polígonos regulares utilizando uma mesma “técnica”.

A construção de conhecimento matemático em ambiente escolar deve sistematicamente explorar: a perspectiva de que a matemática se constitui em uma área dinâmica e viva. Ela não está pronta e acabada; a importância da escolha de um ponto de vista para o entendimento de um problema, a importância da constituição contínua de um repertório de ideias e estratégias que podem ser reaproveitadas em situações semelhantes ou em contextos absolutamente novos; e o desenvolvimento da capacidade de reduzir novos problemas a casos em que já se conheça uma solução. O uso do origami para construção do heptágono e do eneágono fornecem em diferentes níveis a possibilidade de exploração dessas perspectivas. Na equação (4), temos a oportunidade de identificar na estratégia de Gauss uma mudança de ponto de vista para o problema de construtibilidade de polígonos regulares. Ele adota um viés algébrico. Nesta mudança de ponto de vista, o polígono é identificado com uma equação algébrica. Quando passamos de (4) para (5), temos duas oportunidades. Somos apresentados a uma estratégia de exploração da simetria de polinômios palindrômicos que nos permite reduzir a ordem de nosso problema. Ao invés de resolver uma equação de ordem seis, passamos a ter uma equação algébrica de ordem três. Mesmo sem o conhecimento do Lema 1, o contato com a mudança de variável utilizada na passagem de (4) para (5) torna esta estratégia integrante do nosso repertório de ideias. Certamente, voltaremos a pensar nela em problemas análogos. Por outro lado, a redução da ordem do problema e a obtenção de uma equação cúbica abre a possibilidade de uso do Origami para a construção do heptágono. Vemos aqui um problema que não podia ser resolvido por régua e compasso passar a ser solúvel por outra técnica a partir do momento em que Huzita formaliza seus axiomas e eles são explorados pela comunidade acadêmica. A nova prova de construção do eneágono proposta pelos autores deste trabalho ilustra a matemática dinâmica e viva e também mostra que podemos inúmeras vezes reaproveitar ideias para resolver novos problemas. Na construção do eneágono, exploramos simetrias, reduzimos a ordem do problema e reutilizamos o conhecimento de resolução de equações cúbicas através do origami.

Referências

CONRAD, Keith. **Roots on a circle**. Disponível em: <http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/galoistheory/numbersoncircle.pdf>. Acesso em: 22/04/2016.

DICKSON, Leonard Eugene. Criteria for the irreducibility of a reciprocal equation. **Bull. Amer. Math. Soc.** 14, no. 9, 426-430, 1908.

FERNANDES, Carlos. Só Biografias. Disponível em:
<http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/JohaGaus.html>. Acesso em: 22/09/2017.

HUZITA, Humiaki. Drawing the Regular Heptagon and the Regular Nonagon by Origami (paper folding), **Symmetry: Culture and Science**, vol. 5, 1, p. 69-83, 1994.

JUSTIN, Jacques. **Résolution par le Pliage de L'Équation du Troisième degré et Applications Géométriques**. Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, Humiaki Huzita, ed., 1989, pp. 251-261.

KASEM, Asem; GHOURABI, Fadoua; IDA, Tetsuo. **Origami Axioms and Circle Extension**, The 26th ACM Symposium on Applied Computing (SAC), Tunghai University, Taichung, Taiwan, p. 1106-1111, 2011.

PEDROSO, Hermes Antônio; PRECIOSO, Juliana Conceição. O problema da construção de polígonos regulares de Euclides a Gauss. **FAMAT em Revista** (UFU), v. 13, p. 101-115, 2009.

MATTOS, Francisco Roberto Pinto. **Números Construtíveis por Dobraduras de Papel ou Reflexões**. 2001. 295 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

PASSARONI, Luiz Claudio de Sousa. **Construções geométricas por dobradura (ORIGAMI) – Aplicações ao ensino básico**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.