

## CONHECIMENTOS DE ALUNOS DE LICENCIATURA EM QUÍMICA EVIDENCIADOS NO DESENVOLVIMENTO DE UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

## UNDERGRADUATE STUDENT'S KNOWLEDGE OF CHEMISTRY REVEALED WITH THE DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODELING ACTIVITY

Karina Alessandra Pessoa da Silva<sup>1</sup>  
Jader Otavio Dalto<sup>2</sup>

### Resumo

Neste artigo apresentamos resultados de uma pesquisa em que investigamos os níveis de conhecimento que emergem de uma atividade de modelagem proposta e desenvolvida em duas circunstâncias: em horário e espaço extraclasse e no âmbito da própria aula de Matemática. Para isso, fundamentamo-nos nos aportes teóricos da Modelagem Matemática na Educação Matemática e entendemos que sua implementação tem como foco realizar uma interpretação matemática a partir de situações extra matemáticas. Consideramos também os níveis de conhecimento técnico, mobilizável e disponível para caracterizar tarefas desencadeadas em aulas de Matemática. Analisamos uma atividade desenvolvida por um grupo de três alunas de um curso de Licenciatura em Química na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1 de uma universidade pública, na qual emergiu conteúdos relativos à função de uma variável e ao estudo de limites de uma função de uma variável real. Por meio de análise qualitativa de cunho interpretativo de falas e gestos transcritos de momentos orientação, coleta de dados e apresentação, inferimos que os níveis de conhecimento técnico, mobilizável e disponível se articulam no desenvolvimento da atividade, principalmente no momento apresentação e não ocorrem de maneira linear seguindo uma ordem de complexidade técnico-mobilizável-disponível.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Níveis de conhecimento. Cálculo Diferencial e Integral 1. Funções. pH do solo.

### Abstract

This paper presents results of a research in which we investigate the levels of knowledge that emerge from a modeling activity proposed and developed in two circumstances: in extra class time and within the mathematics class itself. For this, we base ourselves on the theoretical contributions of Mathematical Modeling in Mathematics Education and we understand that its implementation has as its focus to perform a mathematical interpretation from extra mathematical situations. We also consider the levels of knowledge technical, mobilizable and available to characterize tasks unleashed in Mathematics classes. We analyze an activity developed by a group of three students of an undergraduate course in Chemistry in the discipline of Differential and Integral Calculus 1 of a public university, in which have emerged contents of function of one variable and the study of limits of function of one real variable. Through qualitative analysis of the interpretative nature of speeches and gestures transcribed from moments of orientation, data collection and presentation, we infer that the levels of technical, mobilizable and available knowledge are articulated in the development of the activity, especially at the moment of presentation and do not occur in a way following an order of technically-mobilizable-available complexity.

**Keywords:** Mathematics Education. Levels of knowledge.. Differential and Integral Calculus 1. Functions. Ground pH.

---

<sup>1</sup> Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Londrina

<sup>2</sup> Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Cornélio Procopio

## Introdução

O estudo de situações problemáticas a partir de abordagens matemáticas tem sido recorrente em aulas de Matemática em diferentes níveis de escolaridade. Essas abordagens, de certa forma, são implementadas por professores que utilizam tendências da Educação Matemática em suas práticas. Uma das tendências que possibilita realizar uma interpretação matemática a partir de uma situação inicial que, de forma geral, se encontra em um contexto extra matemático é a Modelagem Matemática.

Tanto na Educação Básica (LUNA; SOUZA; SANTIAGO, 2009, SANTOS; QUARTIERI, 2014, ALMEIDA; TORTOLA, 2014, COSTA et al., 2015, GONÇALVES; MENEGAIS, 2016, GOULD, 2016, GEIGER; ÄRLEBÄCK; FREJD, 2016) quanto em disciplinas do Ensino Superior (SOARES; BORBA, 2012, IGLIORI; BELTRÃO, 2015, ALMEIDA; SILVA, 2015, ALMEIDA; SILVA, 2017, SILVA, 2017), atividades de modelagem matemática têm sido implementadas em sala de aula, seja em aulas regulares (ALMEIDA; SILVA, 2010, BELTRÃO; IGLIORI, 2010, GOULD, 2016, SILVA, 2017, ALMEIDA; SILVA, 2017), seja em momentos extraclasse (ARAÚJO; CAMPOS, 2015, SCHROETTER et al., 2016, GEIGER; ÄRLEBÄCK; FREJD, 2016).

De forma geral, o que as pesquisas revelam é que atividades de modelagem permitem o ensino de Matemática, a atribuição de significado para o objeto matemático, a transformações de linguagens, a realização de diálogos, a conversão entre diferentes registros de representação, o trabalho colaborativo, a possibilidade de proporcionar ambiente educacional, discussões que possibilitam intervir na realidade próxima, o estabelecimento de relações entre conhecimentos tratados em diferentes disciplinas, dentre outras contribuições na formação do estudante.

No que tange aos conhecimentos mobilizados no desenvolvimento de atividades de modelagem, para além do que as pesquisas revelam, focamos nossa atenção para os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes em tarefas matemáticas como caracterizados por Robert (1997), quais sejam: técnico, mobilizável e disponível. Isso se deve ao fato de considerarmos que tal abordagem se trata de um instrumento de análise para dimensionar o estágio de desenvolvimento dos alunos quanto à aprendizagem da Matemática e “permite identificar esses níveis de conhecimento” (DIAS; MATEUS, 2017, p. 6).

Considerando que, em diferentes cursos do Ensino Superior, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1 está presente no Projeto Político Pedagógico, entendemos que atividades de modelagem matemática podem desencadear os níveis de conhecimento supracitados. No

contexto do curso de Licenciatura em Química<sup>3</sup>, na qual a primeira autora é professora da disciplina de Cálculo<sup>4</sup> desde 2014, atividades de modelagem matemática são desenvolvidas e, de forma geral, apresentam caráter experimental, o que possibilita articular conhecimentos relativos àqueles estudados no curso. Neste contexto é que nos debruçamos em investigar: *Como os níveis de conhecimento esperados de estudantes de Licenciatura em Química emergem no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1?*

As informações que subsidiam nossas reflexões foram obtidas com o desenvolvimento de atividades de modelagem por alunos do curso de Licenciatura em Química, reunidos em grupos, no segundo semestre do ano de 2016. Dentre os conteúdos presentes na ementa da disciplina de Cálculo, no desenvolvimento das atividades, os alunos, de forma geral, entraram em contato com o estudo de diferentes funções de uma variável real, bem como de limites de uma função de variável real.

Para apresentar inferências e resultados de nossa investigação, estruturamos este artigo apresentando a referida introdução, seguida dos referenciais teóricos relacionados à Modelagem Matemática e aos níveis de conhecimento na seção subsequente. A terceira seção é destinada aos aspectos metodológicos que orientaram nossa investigação. Na quarta seção apresentamos a descrição e a análise da atividade de modelagem matemática desenvolvida pelos alunos, destacamos alguns apontamentos e finalizamos com nossas considerações.

### **Modelagem Matemática e níveis de conhecimento: algumas considerações iniciais**

A implementação de atividades de modelagem matemática em sala de aula se configura segundo a perspectiva do professor que a encaminha. De forma geral, o uso da modelagem tem como foco realizar uma interpretação matemática a partir de situações extra matemáticas. Parte-se de uma situação inicial (problemática) e obtém-se uma situação final (solução) que é enviesada por procedimentos e conceitos matemáticos.

Para Almeida e Silva (2017, p. 209), a “introdução e o uso da modelagem matemática nos diversos níveis de escolaridade e em diferentes cursos e disciplinas remete, entretanto, ao uso, à aplicação e à construção de conhecimento em Matemática”. Nesse sentido, corroboramos com Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) que consideram a modelagem matemática

[...] como um caminho para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática ou para o “fazer” Matemática em sala de aula, referindo-se à observação da realidade (do aluno ou do mundo) e, partindo de questionamentos, discussões e investigações, defronta-se com um problema que modifica ações na sala de aula,

<sup>3</sup> No câmpus de Londrina da instituição em que a investigação foi realizada, há somente um curso de licenciatura e a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1 é ofertada prioritariamente para alunos deste curso, devido às especificidades exigidas pelo MEC.

<sup>4</sup> Ao longo do artigo utilizamos o termo Cálculo para nos referirmos a Cálculo Diferencial e Integral 1.

além da forma como se observa o mundo (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011, p. 79).

O que se objetiva é a busca por uma representação matemática para um objeto ou fenômeno não-matemático, criando “uma complexa relação estrutural entre duas entidades de diferente natureza epistemológica: a situação a ser modelada e o sistema matemático” (ALMEIDA; SILVA, 2015, p. 45). Nesse sentido,

[...] aos buscarmos modelar algum fenômeno, uma situação-problema, devemos saber coligir os dados por certo crivo lógico, que resulte em uma formulação que expresse certa regularidade entre os acontecimentos da situação ao fenômeno estudado, para assim gerar um modelo que nos valha para formular preceitos, desvendar causas ou efeitos. Um modelo gerado que não é a ‘realidade’, mas algo que busca aproximar-se desta realidade em certa escala. Modelo que por meio de representações simbólicas permita-nos entendimento desta ‘realidade’ (BIEMBENGUT, 2016, p. 119).

As representações simbólicas, modelo matemático, podem incluir desde símbolos, diagramas e gráficos até expressões algébricas ou geométricas. Doerr e English (2003) caracterizam o modelo matemático como um sistema conceitual, descritivo ou explicativo que tem por finalidade descrever, explicar e mesmo prever o comportamento do fenômeno.

Em investigação desenvolvida com estudantes do Ensino Médio, Gonçalves e Menegais (2016, p. 81) concluíram que “Interpretar o contexto do que se quer modelar exige conhecimento de várias ferramentas e dessas ferramentas deve-se escolher aquela que melhor traduz de forma clara e precisa o fenômeno ou processo em questão”. É nesse sentido que alinhamos nosso entendimento com relação à caracterização de um modelo matemático dada por Davis e Hersh (1995). Esses autores afirmam que uma forma de caracterizar um modelo é considerá-lo bom ou ruim, simplista ou sofisticado, útil ou inútil com relação ao que ele está representando. Isso se deve ao fato da capacidade que o modelo tem de apresentar uma solução ao problema. Se a resposta que o modelo produz é aceitável, então o modelo é bom, é útil.

No entanto, a dedução de um modelo matemático consiste em uma das etapas de desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Para além da dedução do modelo, Gould (2016) destaca que é preciso analisar as relações entre as variáveis presentes no modelo, interpretar os resultados em relação à situação original, validar as conclusões determinando se o modelo precisa ser melhorado e o processo iterado, ou, se é aceito, relatar os resultados. A etapa de relatar/compartilhar resultados exige que os alunos construam argumentos para justificar o que utilizaram, com a possibilidade de esclarecer métodos e procedimentos.

Ao desenvolver atividades de modelagem matemática, conhecimentos de diferentes naturezas são mobilizados, visto que a situação-problema, de forma geral, emerge de um contexto

extra matemático. Para tratar da mobilização de conhecimentos matemáticos, a pesquisadora francesa Aline Robert, em seus estudos, caracterizou tarefas em três níveis de mobilização de conhecimento: técnico, mobilizável e disponível.

No nível técnico, para a resolução da tarefa, o aluno necessita utilizar uma técnica imediata como o emprego de uma regra, um teorema, uma definição ou uma fórmula. Consiste na aplicação imediata de um conhecimento, “indica atividades cujas ferramentas apresentam-se praticamente de forma direta na utilização em problemas” (AMARAL, 2010, p. 34). Não há necessidade de realizar um reconhecimento, uma adaptação. É o emprego de ferramentas matemáticas para a obtenção de uma solução.

Já no nível mobilizável, estão tarefas mais abrangentes do que as do nível técnico, exigindo adaptações de conteúdos, embora ainda com indicações do professor. Pode-se considerar uma justaposição de saberes. Segundo Teixeira (2013, p. 8) se um saber “estiver bem identificado e for bem utilizado pelo aluno, mesmo que seja necessária adaptação ao contexto particular, ele é considerado mobilizável”.

Contudo, o nível disponível corresponde a tarefas em que o aluno precisa saber solucionar o que é proposto a partir de seus próprios conhecimentos, sem indicações ou intervenções do professor do que precisa fazer. Há a necessidade de uma organização de conhecimentos aprendidos. Dias e Mateus (2017), afirmam que:

Esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas que o estudante sabe que conhece (servem de terreno de experimentação), ao fato de dispor de referências, de questionamentos, de uma organização. Pode funcionar para um único problema ou possibilita fazer resumos (DIAS; MATEUS, 2017, p. 9).

Para Robert (1998), os níveis de conhecimento podem se configurar como um instrumento de análise para dimensionar o estágio de desenvolvimento dos alunos quanto à aprendizagem da Matemática. Com isso, há de se evidenciar em que nível se encontra um aluno no processo de aprendizagem quando submetido a uma tarefa matemática.

Corroborando com Borssoi, Silva e Ferruzzi (2016, p. 12), que “atividades de modelagem matemática podem desencadear uma sequência de tarefas, que permitam ao professor aprimorar o processo de construção do conhecimento” intentamos evidenciar como os níveis de conhecimentos caracterizados por Robert (1998) emergem no desenvolvimento de uma atividade de modelagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1.

### **Procedimentos metodológicos**

Na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1, a professora (uma das autoras deste artigo) desenvolve atividades de modelagem matemática ao longo do semestre letivo com o intuito de

familiarizar os alunos com este tipo de atividade. Esse encaminhamento, de certo modo, está ancorado nas orientações de inserção de atividades de modelagem em sala de aula de Almeida, Silva e Vertuan (2012). Para os autores, os alunos precisam ser familiarizados com atividades de modelagem matemática de forma gradativa, para que consigam por si só desenvolver uma atividade cujo tema por eles é escolhido.

Como na ementa da disciplina do curso de Licenciatura em Química é reservada uma carga horária de seis horas/aula para que os alunos realizem Atividade Prática Supervisionada (APS), a professora solicita que desenvolvam atividades de modelagem matemática com temas por eles escolhidos. A APS é uma atividade orientada pelo professor e tem como objetivo estabelecer relações teórico-práticas na disciplina, com o intuito de desenvolver competências provenientes de trabalhos em grupo, atividades em laboratório, atividades de campo, pesquisas, estudos de casos, desenvolvimento de trabalhos acadêmicos, práticas de ensino e atividades específicas dos cursos de licenciatura. De forma geral, os alunos, reunidos em grupos, optam por estudar temas relacionados ao curso em que estão inseridos – Licenciatura em Química.

No segundo semestre do ano letivo de 2016, os temas escolhidos pelos nove grupos formados por 44 alunos que ingressaram na disciplina foram: açúcar em refrigerante, ácido cítrico no suco de maracujá, carbonato em água mineral, produção de equipamentos, sódio no miojo, evasão de alunos do curso de Licenciatura em Química, emissão de dióxido de carbono, violência contra a mulher e potencial hidrogeniônico ( $\text{pH}^5$ ) do solo de um lago da cidade. Levando em consideração o interesse e a disponibilidade dos alunos em participar da pesquisa de projeto de uma aluna de iniciação científica, referenciada no texto pela sigla IC, a atividade pH do solo de um lago desenvolvida por Bianca, Laura e Vitória (nomes fictícios) foi descrita e analisada na próxima seção.

Para inferirmos sobre a mobilização de conhecimento segundo níveis caracterizados por Robert (1997) no desenvolvimento dessa atividade de modelagem matemática, utilizamos registros escritos do relatório entregue pelas alunas, gravações em áudio e vídeo durante análise do solo no laboratório, da orientação que realizaram com a professora e da apresentação em sala de aula. As gravações foram realizadas com o consentimento das alunas e transcritas na íntegra para posterior análise. Para isso, separamos os excertos em três momentos: coleta de dados, orientação e apresentação de resultados.

A coleta de dados ocorreu em campo, com as alunas retirando amostras do solo do lago que, posteriormente, foram analisadas em um dos cinco laboratórios de Química da instituição. Os excertos que analisamos, todavia, são de discussões que ocorreram no laboratório entre as alunas

---

<sup>5</sup> Escala utilizada para medir o grau de acidez de soluções.

e entre estas com a estudante de IC6. As alunas contaram com a supervisão de um técnico de laboratório, principalmente para calibrar instrumentos.

A orientação foi realizada em dois encontros extraclasse com a professora em horários pré-estabelecidos: antes da coleta de dados e após a coleta de dados. As orientações com a professora faziam parte da carga horária da APS e consistiam em atendimentos específicos para os grupos, seguindo encaminhamento proposto por Almeida, Silva e Vertuan (2012) no que concerne ao terceiro momento de familiarização com atividades de modelagem matemática.

Na orientação antes da coleta de dados, as alunas procuraram a professora com o intuito de informar e validar a escolha que fizeram; já na orientação após a coleta de dados, as alunas apresentaram dados tabulados no laboratório e solicitaram auxílio da professora para interpretar matematicamente tais dados. A professora é referenciada no corpo do texto pela letra P.

A apresentação de resultados desta atividade ocorreu durante duas horas-aula no dia 08/12/2016 e teve como objetivo compartilhar resultados com os outros colegas de sala que fizeram questionamentos. Porventura, alunos que realizaram questionamentos durante apresentação são designados por Aluno da sala.

Levando em consideração o encaminhamento realizado pela professora na proposta da atividade de modelagem matemática como APS e, posteriormente, a apresentação em sala de aula com o intuito de compartilhar resultados e esclarecer possíveis dúvidas, entendemos que a implementação ocorreu como combinação de duas circunstâncias: “em horários e espaços extraclasse e no âmbito da própria aula de Matemática” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 21).

As informações coletadas nesses três momentos do desenvolvimento da atividade serviram de dados para nossa investigação que, do ponto de vista metodológico, trata-se de uma pesquisa qualitativa e de análise interpretativa, conforme Bogdan e Biklen (1994). Segundo os autores, o pesquisador tem por objetivo melhor compreender o comportamento e a experiência humana, com isso, ele (o pesquisador) é o principal instrumento da pesquisa.

### **Uma análise didática da atividade desenvolvida**

A atividade sobre a análise do pH do solo das proximidades do Lago Igapó localizado no município de Londrina, foi desenvolvida por três alunas (Bianca, Laura e Vitória) interessadas em investigar se o pH aumenta com a aproximação das margens do lago. Antes de realizar a coleta de dados, o

---

<sup>6</sup> Orientar alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática no laboratório era uma das atividades do projeto de pesquisa da aluna de IC, bolsista do CNPq.

grupo procurou a professora com a intenção de que esta validasse a proposta escolhida, conforme momento *orientação*:

Laura: Veja nossa ideia de APS, professora. Na prática de Química Geral fizemos as menções de alguns elementos presentes no solo. A aluna de iniciação científica disse que um grupo fez estudo do pH do solo daqui da UTF, ali perto do restaurante. A gente pensou em estudar o do solo do Igapó, lá no lago, sabe?

P: De dentro do lago?

Bianca: Não professora, a gente pensou em coletar amostras do solo perto do lago. Dentro não, capaz.

P: Por que? Não dá para fazer esse estudo?

Vitória: Dá sim, mas o que a gente pensou foi...

Laura: [interrompendo] A gente queria coletar amostras do solo em diferentes lugares, perto do lago e depois usar um equipamento que mede o pH que tem no laboratório. O... pHmetro.

P: Dá para estudar alguma coisa?

Bianca: Ver se o pH muda e como muda.

Laura: É professora, ver se perto do lago o pH é neutro, básico ou ácido.

P: Como vocês farão a coleta? Pegando aleatório?

Bianca: A gente pensou em ir pegando [risos].

P: De qualquer maneira? O que vocês querem saber? Deixa eu entender o que você falou Laura. Me explica!

Laura: Não gente. É para ver se perto do lago é maior ou menor e assim indo até afastar.

P: Então é estudar como varia o pH da margem do lago até ir se afastando?

Laura: Isso professora! E analisar se aumenta e diminui. Quanto aumenta e diminui conforme afasta.

P: Entendi. Então vocês vão escolher um local da margem, coletar dados a partir desse local?

Laura: Pode ser isso né? Daí a gente mede distâncias iguais e coleta solo.

No momento orientação, procurando expressar o que intentavam estudar, as alunas referem-se a uma atividade de modelagem já desenvolvida e que tiveram acesso por meio da aluna de IC, nesse caso, o que explicitam é a adaptação de uma situação para outro contexto. A tarefa de escolha de uma situação-problema para ser interpretada matematicamente ocorre por meio de uma adaptação a partir de outra já desenvolvida. Para esse grupo de alunas, escolher uma situação-problema se alinha a uma tarefa de nível de conhecimento mobilizável. O saber científico com relação ao pH do solo está bem identificado (TEIXEIRA, 2013) pelas alunas.

Os questionamentos da professora, além de mobilizar o conhecimento sobre o estudo do pH do solo, procura orientar o encaminhamento da coleta de dados no sentido de as alunas padronizarem-na de forma a poderem estabelecer alguma relação matemática, visando o desenvolvimento da atividade de modelagem. O grupo, a princípio, não está preocupado com um padrão de coleta, mas entende e aceita as orientações relativas à estruturação da coleta. A professora intervém de modo diretivo, estabelecendo uma negociação de forma a chegarem a um senso em comum. De certa forma, a professora percebe que as alunas ainda se encontram indecisas sobre o procedimento que se propuseram a realizar. As alunas precisam organizar uma tarefa de nível



técnico para realizar a coleta de dados. Realizar a coleta de dados em regiões equidistantes da margem é uma organização estruturada para a tabulação dos dados.

Com a situação-problema escolhida e uma ideia do problema a ser investigado – variação do pH do solo do lago ao se aproximar da margem –, a coleta de dados iniciou-se em campo pelas alunas que retiraram amostras do solo do Lago Igapó a partir de diferentes distâncias da margem, separando-as e extraindo materiais, como vegetais e rochas, conforme representado na Figura 1. O trabalho de campo é uma das competências presentes no trabalho de APS.

**Figura 1** – Coleta de dados em campo



Fonte: Relatório entregue pelas alunas.

No laboratório, diante das amostras de solo separadas de acordo com a distância da margem do lago, as alunas se depararam com a dificuldade de determinar o valor do pH, conforme conversa transcrita do momento *coleta de dados*:

Bianca: Aqui estão os solos conforme a distância entre as margens.

Laura: Como iremos dividir? Tipo, todos deram os mesmos pesos ou não?

IC: O pH muda com a massa na opinião de vocês?

Vitória: Acho que não, porque já vi casos onde pega uma parte da amostra e generaliza para todas as outras partes da amostra.

IC: Isso mesmo, não precisa pegar massas distintas, separa uma alíquota e mensura o pH.

Laura: O que é alíquota?

IC: Alíquota é uma parcela da amostra, por exemplo, quinze gramas é uma alíquota da massa total de solo.

Bianca: Olha mede dez gramas de cada solo.

Vitória: Qual balança a gente usa?

IC: Qual vocês acham que deve ser usada?

[alunas e IC conversam sobre os diferentes tipos de balanças]

Bianca: Então pesa dez gramas de cada saquinho de solo.

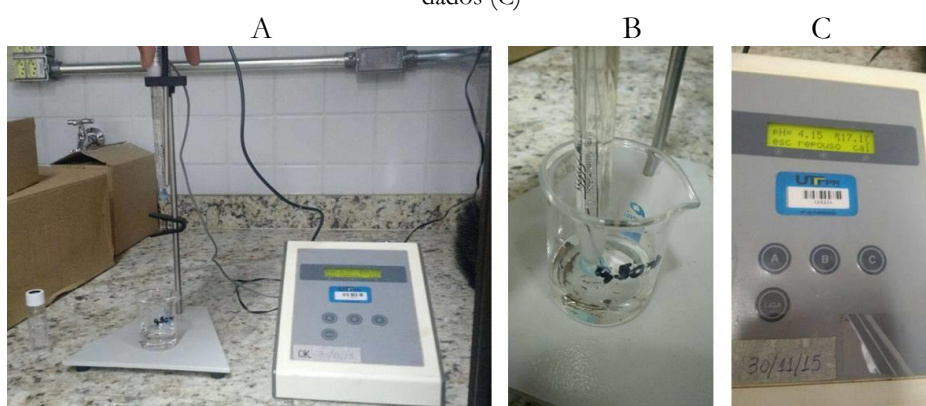
Laura: Depois é só medir o pH?

O uso de termos químicos, como alíquota, não são familiares para as alunas. O acompanhamento realizado pela aluna de IC possibilitou esclarecer alguns procedimentos de uso de materiais como a balança.

Para o desenvolvimento da atividade, as alunas mediram a massa de cada alíquota, obtendo 10 g, de modo com que as massas fossem padronizadas e solubilizadas em 25 mL de água destilada. Após a dissolução, em um béquer de 100 mL cada amostra foi encaminhada ao pHmetro.

O técnico de laboratório explicou cada parte do pHmetro e como deve ser efetuada a mensuração, inclusive explicou a maneira correta de higienizá-lo e anotar os valores apontados no visor. Antes da leitura, o técnico do laboratório e a aluna de IC mostraram e efetivaram a calibração do instrumento, de modo com que cada parte e peça fossem explicadas às alunas (Figura 2).

**Figura 2** – Uso de pHmetro (A), Detalhe da mostra de solo analisada (B), Visor do pHmetro durante a coleta de dados (C)



Fonte: Relatório entregue pelas alunas.

O que fica evidente é que para analisar e medir o pH do solo, técnicas de laboratório se fizeram presentes e interação com conceitos relativos à Química foram necessários para que a tarefa de nível técnico – uso do pHmetro para determinação do pH – fosse desencadeada. A partir das explicações do técnico e da aluna de IC, as alunas determinaram o pH de cada amostra de solo de acordo com a distância, conforme consta na Tabela 1.

**Tabela 1** – pH do solo do Lago Igapó de acordo com distância de um ponto até a margem

Massa (em g)	10	10	10	10	10
Distância do ponto fixo (em m)	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
pH aproximado do solo	3,54	5,68	6,05	6,31	6,53

Fonte: Dados coletados empiricamente pelas alunas.

Com os dados tabulados, o grupo passou a buscar procedimentos matemáticos para expressar o pH do solo conforme a distância do ponto fixo. Nesse momento, procuram a professora em horário extraclasse, conforme transcrição do momento *orientação*:

Laura: Prof, a gente fez a coleta lá no lago e a aluna de IC nos ajudou a medir o pH, mas agora estamos com um pouco de dúvidas aqui.

P: Posso olhar o que vocês têm?

Bianca: Veja aqui professora na folha que a gente fez as anotações. Tem também no computador os pontos no gráfico. A gente ficou com dúvida sabe? Tentamos

ver se os dados são uma reta, uma parábola mas nada disso deu, porque não é né?

Laura: É olha só [apontando para o gráfico]. Aumenta um monte aqui e depois vai o valor do pH vai aumentando devagar.

Bianca: Isso a gente vê na tabela também. Mas professora o que a gente pode fazer? Pode usar o GeoGebra aqui ou mesmo aquele Curve?

P: Sim. Lembrando que os softwares fazem ajustes de curvas e vocês precisam considerar a situação.

Vitória: Então assim é bem mais tranquilo.

P: E o que tem de especial nessa curva?

[silêncio]

P: O que vai acontecendo com o passar do tempo?

Laura: Vai diminuindo e...

Vitória [interrompendo]: Vai se aproximando de uma reta constante. Como é mesmo?

Bianca: Assintótica. Tem de ser gente. Porque lembra o pH da água do lago?

P: E qual é?

Bianca: A gente mediu e deu... deixa eu ver aqui [folheando anotações] seis vírgula setenta e oito. E não pode passar disso, pelo que a gente viu.

P: De qual parte do lago vocês fizeram a coleta?

Laura: Do lago três, aquele do lado do aterro.

Bianca: A gente viu que ao se aproximar do lago o pH aumenta.

Com as orientações após a coleta de dados, as alunas parecem ter compreendido que procedimentos poderiam utilizar para interpretar matematicamente a situação em vias de deduzir um modelo matemático. Com a orientação da professora, é evidente que pensar em curvas que se ajustariam aos pontos no plano cartesiano, observando a representação gráfica consiste em adaptações que a aluna Bianca estabeleceu com formatos de curvas de funções: [...] os dados são uma reta, uma parábola mas nada disso deu, porque não é né? Tentar ‘visualizar’ uma curva de tendência para os dados consiste em uma tarefa de nível mobilizável, “existe um princípio de justaposição de saberes em um dado domínio, e mesmo de organização” (ROBERT, 1998, p. 28). Quando Bianca propõe usar um software de ajustes de curvas – Pode usar o GeoGebra aqui ou mesmo aquele Curve? –, a tarefa se desencadeia para um nível técnico, pois fazer um ajuste de curva por meio do software envolve “processos perceptivos para o reconhecimento de padrões gráficos” (HALL; LINGEFJÄRD, 2017, p. 444). Para tanto, “se refere mais ao funcionamento de ferramentas (que compreendem definições)” (ROBERT, 1998, p. 27).

No entanto, a intervenção da professora – Lembrando que os softwares fazem ajustes de curvas e vocês precisam considerar a situação. – configura a tarefa de ajustar curvas por meio do software em nível mobilizável. Se faz necessário pensar e adaptar o reconhecimento de padrões gráficos para o que estão estudando, interpretar os resultados em relação à situação original (GOULD, 2016).

Essa ação de interpretar os resultados, retomando a situação original é acionada pelas alunas quando a professora as questiona sobre características do comportamento dos dados – O que vai

acontecendo com o passar do tempo?. De imediato, Laura argumenta que o crescimento vai diminuindo e Vitória já estabelece uma relação com o comportamento assintótico do fenômeno que é complementada por Bianca que considera como limite o pH da água. O questionamento da professora desencadeia conhecimento em nível mobilizável que proporciona uma tarefa de nível disponível “associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas que o estudante sabe que conhece (servem de terreno de experimentação)” (DIAS; MATEUS, 2017, p. 9) com relação ao comportamento assintótico de um fenômeno.

Levando em consideração as tarefas desencadeadas no momento orientação, os procedimentos matemáticos para a dedução do modelo fica sob responsabilidade das alunas que os apresentam em relato dos resultados para os outros colegas de sala. Nesse momento do desenvolvimento da atividade de modelagem, o grupo opta por propor aos colegas de sala que determinem o pH do solo do Lago Igapó ao se aproximar da margem a partir de um ponto fixo segundo função matemática dada por  $H(d) = 5,78(d - 0,12)^{0,14}$ , em que  $H$  representa o potencial hidrogeniônico em função da distância  $d$ , em metros, conforme apresentado no Quadro 1.

**Quadro 1 – Tarefa proposta pelo grupo na apresentação dos resultados**

pH do Lago Igapó					
Coletamos amostras do solo nas proximidades do Lago Igapó 3 e observamos que o pH tendia a tornar-se alcalino. Observe os dados e faça o que se pede.					
<ul style="list-style-type: none"> <li>A cada distância, o pH é alterado. Utilize a função <math>H(d) = 5,78(d - 0,12)^{0,14}</math> e complete o quadro:</li> </ul>					
Distância (d)	0,5 m	1,0 m	1,5 m	2,0 m	2,5 m
pH (H)					
<ul style="list-style-type: none"> <li>Sabendo que a água do lago tem pH = 6,78 e que a distância 2,5 m é a que se encontra mais perto do lago, discuta e argumente: a água modificou o pH do solo?</li> </ul>					

Fonte: Relatório entregue pelas alunas.

A proposta de relato conduzida pelas alunas parece mobilizar conhecimentos em didática estudados em disciplina do curso de Licenciatura em Química em que as alunas solicitam a participação dos colegas para resolver um problema que exige uma tarefa de nível técnico em que fazem uso de uma função para determinarem uma solução ao completarem o quadro.

Embora a função, obtida com o auxílio do software apresentasse soluções para a situação, as alunas não consideraram a hipótese de que o pH da água (de 6,78) seria o valor máximo a ser considerado e que a função deveria ter um comportamento assintótico, conforme excerto da transcrição do momento *apresentação*:

Laura: Pessoal vocês conseguiram completar a tabela de valores?

Aluno da sala: Sim.

Laura: E quanto à pergunta que a gente colocou [lê a pergunta]. O que vocês podem nos dizer.

Aluno da sala: Eu fiz as contas aqui e vi que para chegar ao pH da água, a distância do ponto fixo é de três vírgula vinte e cinco aproximadamente.

Laura: E você conseguiu determinar essa distância?

Aluno da sala: Consegui. Mas eu fiquei com dúvida. Professora, a gente precisa considerar a situação não é?

[professora gesticula para o aluno perguntar para a aluna que está apresentando]

Laura: Temos sim.

Aluno da sala: Então, eu fiz o gráfico aqui e essa função vai passar do valor do pH da água. Será que isso é verdade?

Laura: Deixa eu ver [olhando a representação feita pelo aluno – Figura 3]. Nossa, você fez a função constante também?

Aluno da sala: Sim, pensei que o limite fosse o valor do pH da água. Não é?

Bianca: Professora, a gente esqueceu desse detalhe. [risos]

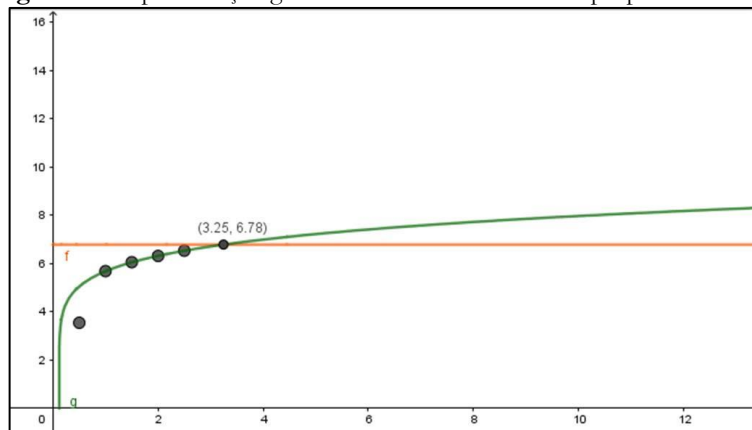
Laura: E agora?

P: Realizem outro encaminhamento!

Vitória: Então vamos fazer assim. A partir dos valores que vocês têm aí na tabela, vamos usar o Curve para determinar a função. Pode ser professora? Pode ser gente? Temos alguns minutos ainda. Professora [sussurrando], vamos retomar aqui enquanto eles fazem o deles.

Relatar resultados possibilita que os alunos apresentem argumentos e desencadeiam tarefas de níveis de conhecimento distintos. Ao encaminhar o relato como abordagem em que solicitam a participação de outros colegas da sala, as alunas, em certa medida, desencadeiam tarefas de nível técnico em que há necessidade de empregar uma regra de obter uma solução, “cujas ferramentas apresentam-se praticamente de forma direta” (AMARAL, 2010, p. 34). Todavia, um dos alunos recebe e desencadeia a tarefa considerando seus próprios conhecimentos, sem indicações do que precisa fazer e avança no sentido de considerar a situação e a hipótese de que o pH do solo não pode ultrapassar o pH da água. Com isso, evidenciamos que a proposta das alunas para esse aluno, em especial, desencadeia tarefa de nível de conhecimento disponível em que o aluno considera a situação, representa graficamente a função dada e identifica que essa ultrapassa o limite ( $\text{pH} = 6,78$ ), conforme gráfico por ele construído no software GeoGebra (Figura 3).

**Figura 3** – Representação gráfica do modelo matemático proposto na tarefa



Fonte: Arquivo da professora (encaminhado pelo Aluno da sala por e-mail).

Para esse aluno, o modelo não é válido e seus questionamentos retornam a tarefa para as alunas em deduzir um modelo matemático. Vitória propõe, então, que os colegas façam uso do

software Curve Expert para juntos deduzirem um ‘novo’ modelo matemático, desencadeando uma tarefa de nível mobilizável.

A ação das alunas em proporem outro encaminhamento para a atividade e sugerir que os colegas auxiliem configura que é “a prática de modelar que melhora o entendimento dos dados e dos meios em articulá-los, a sensibilidade quanto às limitações da estrutura matemática para solucioná-la, a capacidade de julgamento e de tomada de decisão, chegando a um equilíbrio adequado” (BIEMBENGUT, 2016, p. 120-121). Esse equilíbrio é proporcionado pela instabilidade criada por um dos colegas da sala de aula.

No momento apresentação é que se configura a volta de um olhar para a situação investigada em que as alunas analisaram as relações entre as variáveis presentes no modelo, interpretando os resultados, etapas que segundo Gould (2016) fazem parte do desenvolvimento da atividade de modelagem. Nesse sentido, corroboramos com Biembengut (2016, p. 121) de que “Elaborar um modelo o mais preciso possível, implica entender a solução e estar apto a utilizá-la”. É no compartilhamento dos resultados que as alunas necessitaram reavaliar o modelo matemático para representar a situação. Com o software Curve Expert, realizam análises matemáticas e escolhem o modelo  $H(d) = 6,64(1 - e^{-1,66d})$ , definido por  $H: \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, 6,64)$ , em que  $H$  representa o potencial hidrogeniônico em função da distância  $d$ , em metros, conforme transcrição do momento *apresentação*.

Laura: Como ficou agora gente?

[alunos falam simultaneamente os modelos obtidos]

Laura: Vamos explicar aqui o que consideramos agora com tudo que foi falado. Vitória, liga o computador, vamos projetar e ir explicando.

Bianca: Posso explicar o que fizemos, na verdade o que o computador fez e o que escolhemos? [Laura acena com a cabeça de forma positiva]. Olha, o curve deu aqui trinta e duas curvas, mas escolhemos a treze. Não sei porque a gente não fez essa escolha antes. Bom, agora já foi [risos], mas vamos lá. Olhamos curva a curva e as anteriores deu um coeficiente melhor, só que não passavam por esse último ponto [apontando para (2,5, 6,53), da Figura 4] que a gente queria que passasse e também quando a gente calculava o limite era superior ao pH da água. Quando chegamos nessa exponencial, vimos que o cálculo do limite é de seis vírgula sessenta e quatro, maior do que nosso último ponto e menor do que o pH da água. Alguém pode fazer o gráfico no Curve e comparar agora? Não... affff... no GeoGebra [risos], no Curve já fizemos.

Aluno da sala: Deixa que eu faço!

[Aluno da sala representada graficamente – Figura 5]

Aluno da sala: Agora sim.

Laura: Projeta aqui.

Aluno da sala: Nunca se tocam agora, o limite tende e não chega. Mas para a segunda pergunta, acho que não somente a água altera o pH do solo, mas as pessoas que podem jogar lixo, folhas secas, insetos, minhocas e outras coisas que estão por ali.

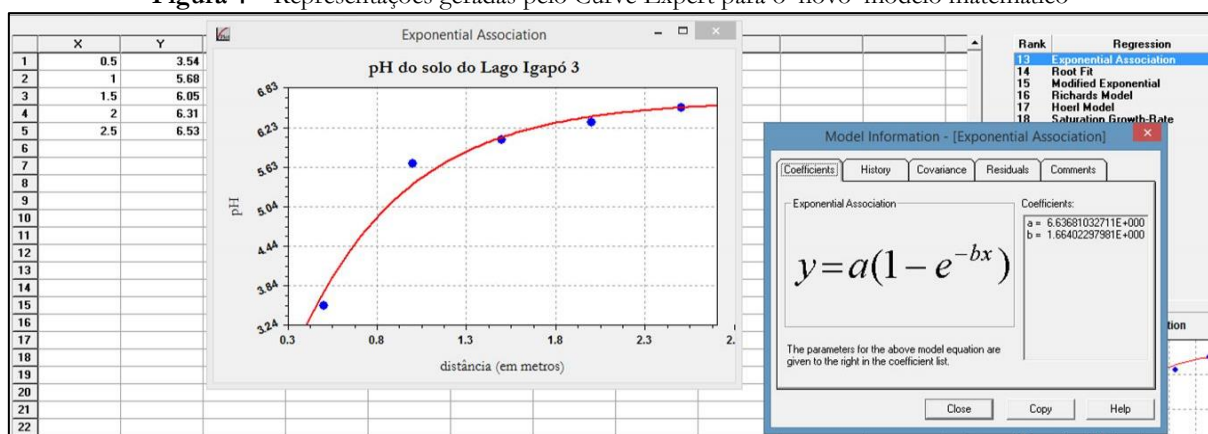
Laura: Isso mesmo, a gente fez uma limpa no solo, tinha gramas, pedras e outras coisas, até bituca de cigarro. Com certeza isso altera o pH do solo.

Vitória: É gente. A gente sabe que se o pH é igual a sete, o solo é neutro, se é maior que sete, é básico ou alcalino e menor que sete é ácido. Então a gente pensou que tendia a tornar-se alcalino, mas não vai. Pelo menos não nessa região que a gente coletou as amostras.

Considerar as representações gráficas do Curve Expert é uma tarefa de nível técnico, todavia, a escolha da função que representa a situação, consiste, nesse momento, uma tarefa de nível mobilizável, desencadeada pela intervenção do Aluno da sala. Considerar a hipótese de que o pH não ultrapasse o da água, bem como o último ponto obtido na coleta de dados empíricos aproxima a representação gráfica de “processos conceituais que traduzem os atributos visuais em questão, tais como quantidades, escalas e símbolos para conceitos relevantes” (HALL; LINGEFJÄRD, 2017, p. 444).

A escolha da função  $H(d) = 6,64(1 - e^{-1,66d})$ , está atrelada à situação, bem como aos conceitos relevantes considerados pelas alunas – *Olhamos curva a curva e as anteriores deu um coeficiente melhor, só que não passavam por esse último ponto [apontando para (2,5, 6,53), da Figura 4] que a gente queria que passasse e também quando a gente calculava o limite era superior ao pH da água.* Identificar tal função corresponde a uma tarefa de nível disponível, pois além de considerarem a situação original, as alunas fizeram uso de conhecimentos próprios estudados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1 – limite da função quando a distância tende ao infinito. É de se considerar que, para essas alunas, que estavam diante da conclusão de tal disciplina, realizar o cálculo de  $\lim_{d \rightarrow \infty} 6,64(1 - e^{-1,66d}) = 6,64$ , consiste em uma tarefa de nível técnico. O que destacamos é entenderem que poderiam fazer o uso desse conceito para analisar as curvas que estavam investigando.

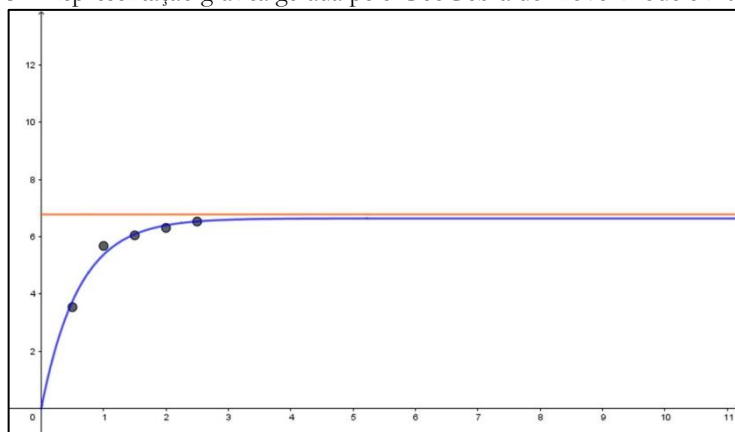
Figura 4 – Representações geradas pelo Curve Expert para o ‘novo’ modelo matemático



Fonte: Relatório entregue pelas alunas.

Diante do ‘novo’ modelo matemático deduzido, o Aluno da sala valida as conclusões (*Agora sim*), aceitando-as a partir do que foi exposto pelas alunas, bem como da representação gráfica que gerou com o GeoGebra (Figura 5), que possibilitou evidenciar “processos perceptivos que operam em representações gráficas e criam um significado qualitativo / quantitativo” (HALL; LINGEFJÄRD, 2017, p. 444).

**Figura 5** – Representação gráfica gerada pelo GeoGebra do ‘novo’ modelo matemático



Fonte: Arquivo da professora (encaminhado pelo Aluno da sala por e-mail).

A coleta de dados em campo e, posteriormente, a realização das análises laboratoriais auxiliaram na comprovação da hipótese de que às margens do lago o pH tende a um caráter ácido, uma vez que neste local se aglomeram um maior número de resíduos e lixos. Essa abordagem contribuiu para o desenvolvimento da atividade e para a formação das alunas quanto aos métodos químicos a serem aplicados no ambiente no caso de contaminação. Com isso, na atividade de modelagem matemática desenvolvida,

a promoção de atividades investigativas com enfoque experimental possibilita a integração de objetivos conceituais e epistêmicos, [...] e exige dos estudantes a tomada de decisões, julgando a consistência dos diversos dados obtidos, a validade de um determinado modelo teórico para explicá-los e as evidências que justificam suas decisões (SILVA; TRIVELATO, 2017, p. 150).

### **Níveis de conhecimento em atividades de modelagem matemática: alguns apontamentos**

Dentre as diferentes configurações de implementação de atividades de modelagem matemática em sala de aula, entendemos que uma combinação que atrela encaminhamentos em horários e espaços extraclasse e na própria aula possibilita que professor e alunos avancem na escolha e desenvolvimento da situação a ser estudada. Isso se deve ao fato de os próprios alunos coletarem e manipularem materiais para a produção de dados matematizados para a dedução de um modelo matemático que represente a situação e permita a tomada de decisão com relação a solução para o problema definido.



De forma geral, a escolha da situação-problema a ser investigada emerge do interesse das alunas e consiste de temáticas próximas a elas. Na atividade descrita e analisada neste texto fica evidente que as alunas procuraram desenvolver uma adaptação de atividade de modelagem já desenvolvida por outros alunos que estas tiveram contato via aluna de IC. Com isso, a tarefa desencadeada na escolha da situação consiste em nível mobilizável de conhecimento. Para tanto, necessitam da validação da professora no momento *orientação*.

Devido à natureza da situação, a coleta de dados precisa ser encaminhada seguindo regras tanto no que diz respeito a técnicas laboratoriais quanto a técnicas matemáticas, mobilizando conhecimento de nível técnico. Não podem coletar amostras de solo de forma aleatória se a intenção é analisar a variação de pH do solo do Lago Igapó ao se aproximar da margem. A professora orienta sobre a forma que precisam coletar os dados e é no laboratório da instituição que a tabulação dos dados acontece seguindo procedimentos de análise e leitura do pHmetro sob supervisão e orientação de aluna de IC e técnico de laboratório – momento *coleta de dados*.

Para deduzirem um modelo matemático que represente a situação, as alunas realizam tarefas de nível técnico, mobilizável e disponível no momento *orientação*. A partir dos dados tabulados e dispostos no plano cartesiano, tarefa de nível mobilizável se faz presente ao observarem o comportamento dos dados e, por hipótese, indicarem curvas que possam se ajustar aos mesmos, lembrando comportamentos de funções polinomiais de primeiro e segundo grau. Como estão familiarizadas com uso de softwares de ajustes de curvas, pois é uma ação presente nas aulas de Cálculo ministradas pela professora, lançam mão da representação gráfica produzida por estes para realizarem tarefas de nível técnico. Segundo Hall e Lingefjård (2017):

A compreensão de um gráfico pode envolver vários processos:  
- processos perceptivos para o reconhecimento de padrões gráficos  
- processos perceptivos que operam em representações gráficas e criam um significado qualitativo / quantitativo  
- processos conceituais que traduzem os atributos visuais em questão, tais como quantidades, escalas e símbolos para conceitos relevantes (HALL; LINGEFJÄRD, 2017, p. 444).

Em uma atividade de modelagem matemática esses processos precisam estar alinhados à situação-problema que a originou de forma que o gráfico da função represente o que está sendo investigado. Identificar que a função que representa a situação tem de ser aquela com comportamento assintótico e que essa assíntota consiste no valor do pH da água do lago indica nível de conhecimento disponível que já foi estudado na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1, é familiar para as alunas, consistindo em “conhecimento de situações de referência variadas” (DIAS; MATEUS, 2017, p. 9).

O momento *apresentação* em que se vislumbra o relato de resultados consiste na construção de argumentos pelas alunas para justificarem o que desenvolveram. O grupo analisado opta por apresentar o modelo matemático que deduziram para propor tarefa de nível técnico para os outros colegas de sala. Tal encaminhamento coloca em ‘xeque’ o modelo matemático deduzido quando um Aluno da sala, considerando a situação-problema bem como a hipótese de que o pH do solo não ultrapassa o da água realiza tarefa de nível disponível para questionar sobre a validade do modelo determinado.

Diante desse impasse, o grupo de alunas propõe outro encaminhamento (re)considerando a situação e solicita que os colegas ajudem na dedução do ‘novo’ modelo matemático fazendo uso de recursos computacionais. Tal atitude possibilita desenvolver tarefas de níveis técnico e mobilizável ao considerarem o software e a curva que passa pelo último ponto e é inferior ao pH da água, respectivamente. Todavia, a escolha da curva consiste em uma tarefa de nível disponível, pois diferentes conhecimentos já construídos na disciplina se fazem presentes: cálculo de limite de função exponencial para encontrar a assíntota.

O desenvolvimento da atividade de modelagem matemática descrita e analisada permite-nos inferir que o momento *apresentação* é aquele no qual diferentes níveis de conhecimento se articulam e não ocorrem de maneira linear, ou seja, seguindo uma ordem de complexidade técnico-mobilizável-disponível. As alunas precisam conhecer técnicas matemáticas articuladas à situação e que, de certa forma, já foram estudadas para apresentar uma solução consistente para o problema a ser investigado.

### **Considerações finais**

Na literatura, as pesquisas que tratam do conhecimento dos alunos em atividades de modelagem matemática consideram aspectos relativos aos conceitos e procedimentos matemáticos. Ao considerarmos os níveis de conhecimento propostos originalmente por Robert (1998), em nossa investigação, os conceitos e procedimentos matemáticos e outros que se fizeram presentes foram caracterizados em técnico, mobilizável e disponível no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Todavia, levando em consideração os avanços tecnológicos, o uso de *softwares* computacionais podem mobilizar conhecimentos em níveis distintos, dependendo da familiarização dos alunos com os referidos softwares.

Nossas análises lançaram olhar para uma das atividades de modelagem matemática, visto que esta foi acompanhada pela professora e pela aluna de IC deste a escolha da situação-problema a ser investigada até seu compartilhamento com toda a turma, devido ao interesse e à disponibilidade das alunas que a desenvolveram. A aluna de IC, bem como o técnico de laboratório

tiveram participação significativa, principalmente na coleta de dados em que conhecimentos de nível técnico se fizeram presentes. Em atividades de modelagem matemática, para além do professor de Matemática, a colaboração de outros profissionais e professores de outras disciplinas é importante, configurando uma abordagem interdisciplinar para este tipo de atividade. No entanto, pode ser que esse tipo de colaboração seja impossibilitado em contexto de sala de aula, requerendo de professor e alunos a realização de pesquisas para entendimentos de temas pertencentes a outras áreas de conhecimento, mobilizando outros níveis de conhecimento.

Considerando o caráter qualitativo da pesquisa que realizamos, nosso olhar para uma das atividades revela os diferentes níveis de conhecimento que podem estar presentes nos diferentes momentos de desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, o que não exclui a presença dos mesmos nas atividades desenvolvidas pelos outros grupos.

Entendemos que em sala de aula o acompanhamento “individualizado” para os grupos pode não ser viável quando se faz a proposta destes escolherem temas que são de seus interesses. Uma maneira de abarcar possibilidades de orientações mais homogêneas é o professor lançar o mesmo tema para todos os grupos de alunos, em que estes ficam responsáveis pela coleta de dados ou o próprio professor leva dados para a sala de aula, conforme proposta de Almeida, Silva e Vertuan (2012) para o primeiro e segundo momentos de familiarização, configurando possibilidades para o desenvolvimento de pesquisas futuras. Além disso, se a turma é constituída por um número significativo de alunos, pode haver impossibilidades de realizar o trabalho em laboratório de informática, no entanto, temos lançado mão de uso de softwares na versão para o telefone celular, pois consideramos que esta tecnologia faz parte da vida de muitos alunos do Ensino Superior.

Uma limitação para a investigação está no fato de a professora não ter requerido das alunas participantes da investigação avançar em seus estudos em conteúdos presentes na ementa da disciplina de Cálculo. Embora as alunas tenham abarcado funções de uma variável real e limite no infinito de função de uma variável real, determinando a assíntota, a professora poderia ter aproveitado a atividade desenvolvida para desencadear discussões e desdobramentos sobre concavidade e taxa de variação do crescimento da curva, inexistência de extremos da função que poderia confrontar informações inerentes às propriedades químicas do pH na situação investigada. O que podemos conjecturar é que uma atividade de modelagem matemática não se finda com o compartilhamento de seus resultados, podendo ser revisitada, ampliada e mesmo reconfigurada promovendo a articulação entre os níveis de conhecimento técnico, mobilizável e disponível.

## Referências

- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, A. Por uma Educação Matemática Crítica: a Modelagem Matemática como alternativa. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.12, n.2, p. 221-241, 2010.
- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. A Ação dos Signos e o Conhecimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**, v. 31, n. 57, p. 202-219, abr., 2017.
- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. The Meaning of the Problem in a Mathematical Modelling Activity. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice: cultural, social and cognitive influences**. ICTMA 16. New York: Springer, p. 45-54, 2015.
- ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.
- ALMEIDA, L. M. W.; TORTOLA, E. Modelagem matemática no ensino fundamental: a linguagem de alunos como foco de análise. **JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática IJSME – International Journal for Studies in Mathematics Education**. n.1, v.7, p. 111-142, 2014.
- AMARAL, F. M. **Validação de Sequência Didática para (Re)Construção de conhecimentos Estatísticos por Professores do Ensino Fundamental**. 106 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2010.
- ARAÚJO, J. L.; CAMPOS, I. S. Negotiating the Use of Mathematics in a Mathematical Modelling Project. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice: cultural, social and cognitive influences**. ICTMA 16. New York: Springer, p. 283-291, 2015.
- BELTRÃO, M. E. P.; IGLIORI, S. B. C. Modelagem Matemática e Aplicações: Abordagens Para o Ensino de Funções. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.12, n.1, p.17-42, 2010.
- BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.
- BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. 2.ed. Porto: Porto Editora, 1994.
- BORSSOI, A. H.; SILVA, K. A. P.; FERRUZZI, E. C. Tarefas desencadeadas em aulas com modelagem matemática. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. **Anais...** Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. v. 1. p. 1-12.
- COSTA, L. M.; ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; PASSOS, M. M. A conversão entre diferentes registros de representação semiótica em uma atividade de modelagem matemática. **Vidya**, v. 35, n. 1, p. 71-90, jan./jun., 2015.
- DAVIS, P. J; HERSH, R. **A experiência matemática**. Lisboa: Gradiva, 1995.

DIAS, M. A.; MATEUS, P. Níveis de conhecimento esperados dos estudantes como auxílio para o ensino e aprendizagem das noções de primitiva de uma função e integral de Riemann. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v.8, n.1, p. 1-24, 2017.

DOERR, H. M.; ENGLISH, L. D. A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 34, n. 2, p. 110-136, 2003.

GEIGER, V.; ÄRLEBÄCK, J. B.; FREJD, P. Interpreting Curricula to find: opportunities for modeling: case studies from Australia and Sweden. In: NCTM. **Mathematical Modeling and Modeling Mathematics**, APME, USA, p. 207-215, 2016.

GONÇALVES, D. B.; MENEGAIS, D. A. F. A modelagem matemática no estudo de funções exponenciais. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v.6, n.2, p.71-81, mai/ago., 2016.

GOULD, H. What a modeling task looks like. In: NCTM. **Mathematical Modeling and Modeling Mathematics**, APME, USA, p. 179-186, 2016.

HALL, J.; LINGEFJÄRD, T. **Mathematical Modeling: applications with GeoGebra**. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2017.

IGLIORI, S. B. C.; BELTRÃO, M. E. P. Ensino de Cálculo pela Modelagem Matemática e Aplicações em um Curso Superior Tecnológico. **Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. n. 42, p. 55-76, nov. 2015.

LUNA, A. V. A.; SOUZA, E. G.; SANTIAGO, A. R. C. M. A modelagem matemática nas séries iniciais: o germém da criticidade. **Alexandria – Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p. 135-157, 2009.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

ROBERT, A. **Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée à l'université. Recherches en didactique des Mathématiques**, France, v. 18, n. 2, p. 139-190, 1998.

ROBERT, A. Quelques outils d'analyse épistémologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. In: IX Ecole d'été de didactique des mathématiques, 1997, Houlgate. **Actes de la IX école des d'été de didactique mathématiques**. Houlgate: ARDM, 1997, p. 192-212.

SANTOS, F. A.; QUARTIERI, M. T. Modelagem matemática e bicicleta: investigação do custo benefício deste meio de transporte. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v.4, n.3, p. 68-78, set/dez., 2014.

SCHROETTER, S. M.; STAHL, N. S.; CHRYSOSTOMO, C. S.; DUNCAN, C. R. A escrita e o pensamento matemático no ambiente virtual utilizando a modelagem matemática: experiência de uma turma de 9ºano. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.18, n.1, p. 373-396, 2016.

SILVA, K. A. P. Modelagem matemática em sala de aula: caracterização de um ambiente educacional. **Revista Paranaense de Educação Matemática**. Campo Mourão. v.6, n.10, p.135-157, jan.-jun., 2017.

SILVA, M. B.; TRIVELATO, S. L. F. A mobilização do conhecimento teórico e empírico na produção de explicações e argumentos numa atividade investigativa de Biologia. **Investigações em Ensino de Ciências**, v.22, n.2, p. 139-153, 2017.

SOARES, D. S.; BORBA, M. C. O Interesse de Alunos de Biologia pela Análise de um Fenômeno Biológico e seu Modelo Matemático. In: V SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2012, Petrópolis. **Anais...** Petrópolis, v. 1, p. 1-18, 2012.

TEIXEIRA, A. C. **Orientações didáticas sobre a mobilização de conhecimentos matemáticos esperados dos alunos em relação a itens e questões**. São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2013.