RECM
REVISTA DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

VISUALIZAÇÃO E IMAGEM DE CONCEITO NO CASO DA INTEGRAL DE LINHA

VISUALIZATION AND CONCEPT IMAGE IN CASE OF LINE INTEGRAL

Juliano Cezar Ferreira[1]
Orestes Piermatei Filho[2]

Resumo

Este artigo discute e analisa imagens e definições de conceito referentes a Integral de Linha registradas por estudantes em tarefas com questões matemáticas para serem respondidas com o auxílio do software *Maple.* A teoria da Imagem de Conceito de David Tall (TALL, 1981) foi empregada como embasamento teórico para a análise dos dados coletados pelos participantes da pesquisa. As respostas escritas nos formulários e os diálogos coletados durante a pesquisa de campo revelaram o modo como um estímulo diferente na fase de apresentação do conceito pode favorecer novas compreensões para a Integral de Linha de Campos Vetoriais. O estímulo em questão, favorecido pelo *software,* seria a visualização de objetos matemáticos que constituem a noção da Integral de Linha de Campos Vetoriais. O estímulo visual proporcionado pela construção do objeto matemático na janela de visualização do *software* parece ter modificado o modo como o estudante concebe a Integral de Linha. Além disso, a partir das análises foi possível identificar, em alguns relatos, indícios de uma estratégia desenvolvida na resolução de problema estimuladas pelo processo de visualização.

Palavras-chave: Educação Matemática. Pensamento Matemático Avançado. Cálculo Diferencial e Integral.

Abstract

This article discusses and analyzes images and concept definitions relating to line Integral recorded by students in tasks with mathematical questions to be answered with the aid of the software Maple. The theory of Concept image of David Tall (TALL, 1981) was used as a theoretical basis for the analysis of data collected by the research participants. The written answers on forms and dialogues collected during field research revealed how a different stimulus, during the presentation phase of the concept, can encourage new understandings to the Line Integral of Vector Fields. Therefore, the stimulus favored by the software would be the viewing of mathematical objects that constitute the notion of Line Integral of Vector Fields. The visual stimuli provided by the construction of the mathematical object in the preview window of the software seems to have modified the way the student designs the Line Integral. In addition, from the analysis it was possible to identify, in some accounts, evidences of a strategy developed during problem solving that were stimulated by the process of visualization.

Keywords: Mathematics Education. Advanced Mathematics Thinking. Differential and Integral Calculus.

[1] IF Sudeste MG
[2] UJFJ

Introdução

Esse artigo apresenta aspectos de nossa investigação referentes à aprendizagem da matemática no Ensino Superior por estudantes universitários matriculados em um curso de graduação em Física. Deseja-se discutir compreensões matemáticas de estudantes em tarefas matemáticas que permitam a visualização através do *Maple*[3], portanto, está inserido no âmbito dos processos de ensino e aprendizagem matemática. O *software* usado já estava disponível na instituição. O interesse central da pesquisa não recaiu sobre o *software* em si, mas em investigar como o mesmo poderia ser usado como uma intervenção que pudesse enriquecer imagens de conceito, de modo que qualquer outro *software* equivalente poderia ser usado. A questão norteadora desse artigo é: como a visualização afeta as imagens de conceito referentes a Integral de Linha de Campos Vetoriais? Para investigar a questão concentramos o olhar nas escritas matemáticas dos sujeitos de pesquisa e suas aproximações semânticas com a definição formal da integral de linha. Durante as análises realizadas pelos pesquisadores, um olhar mais refinado foi direcionado para os possíveis obstáculos observados nesse processo e como poderiam auxiliar no desenvolvimento de estratégias alternativas de ensino.

Nesta pesquisa nossa a atenção voltou-se exclusivamente para as concepções matemáticas dos estudantes de um curso de Física matriculados na disciplina denominada Cálculo III[4] sobre a integral de linha de campos vetoriais. Foi adotada como referencial para análise dos dados a teoria das Imagens de Conceitos (TALL; VINNER, 1981) e o Pensamento Matemático Avançado (PMA). O Pensamento Matemático Elementar e o Pensamento Matemático Avançado permitem o uso de generalizações, mas enquanto no primeiro aborda-se o pensamento criativo, no segundo considera-se a abstração e a maneira como se manipula os conceitos matemáticos de forma abstrata. O Cálculo Diferencial e Integral – e, em particular, as integrais de linha – exige procedimentos abstratos para entendimento de seus conceitos, bem como a manipulação abstrata dos mesmos, justificando, assim, a escolha deste referencial. Além disso, o PMA permite investigar recortes possíveis da porção das imagens de conceitos referentes à integral de linha de campos vetoriais evocadas pelos estudantes em tarefas matemáticas não convencionais. A intervenção feita com o *Maple* em algumas atividades permitiu a visualização dessas integrais como trabalho realizado, além de tornar mais ágeis cálculos estritamente procedimentais.

---

[3] *Maple* é um software algébrico comercial de uso genérico. Constitui um ambiente informático para a computação de expressões algébricas, simbólicas, permitindo o desenho de gráficos em duas ou três dimensões. O seu desenvolvimento começou em 1981 pelo Grupo de Computação Simbólica na Universidade de Waterloo em Waterloo, no Canadá, província de Ontário. Disponível em: <pt.wikipedia.org/wiki/MAPLE>

[4] Cálculo III é uma disciplina Matemática ofertada por uma instituição de ensino superior, que possui Integral de Linha de Campos Vetoriais em sua ementa.

Sobre o Pensamento Matemático Avançado

O interesse das pesquisas em Educação Matemática no Ensino Superior não é recente. Pesquisadores liderados por David Tall (TALL, 1991) há quatro décadas já investigavam os fenômenos ocorridos no processo de ensino e aprendizagem da matemática do ensino superior, mais especificadamente os objetos do Cálculo Diferencial e Integral. Esse grupo denominou-se *Advanced Mathematics Thinking* (AMT)[5] e se propôs, a partir de então, a focar suas investigações no campo da psicologia cognitiva inseridos na Educação Matemática. Um dos objetivos era identificar, prioritariamente, elementos específicos do pensamento matemático avançado que constitui o conhecimento matemático universitário. Para o grupo havia uma questão norteadora: Como se comporta o cognitivo do estudante diante da apresentação de um conceito matemático novo? Ao apresentar um conceito matemático para o estudante, ele poderá construir ideias e imagens mentais que poderão ser utilizadas em inúmeras situações acadêmicas e em diferentes momentos de trabalho com aquele conceito. Cada indivíduo constrói uma estrutura conceitual iniciada pela apresentação. Para tanto, os termos imagem de conceito e definição de conceito foram construídos e descritos por Tall e Vinner (1981) no sentido de elucidá-los e, portanto, facilitar um entendimento da estrutura cognitiva construída pelo estudante nos momentos de apresentação de novos conceitos matemáticos.

O estudante tem uma reação diante de uma expressão dita ou lida. Há um estímulo na memória do estudante no momento em que ele ouve ou vê uma expressão como, por exemplo, "campo vetorial" e então ele evoca alguma imagem mental nesse momento associada aos termos (VINNER, 1991), que de modo geral não é necessariamente a definição técnica/formal do conceito, isto é, a definição formal (em forma abstrata) entendida pela comunidade matemática. É o que Vinner (1991) chama de imagem de conceito. O histórico de experiências escolares matemáticas do estudante, por exemplo, nesse caso, é valorizado, uma vez que as imagens mentais elaboradas na sua memória naquele momento podem fazer parte de um conjunto que contenha muitos objetos associados ao conceito, assim como uma única imagem ou até mesmo nenhuma imagem. Como observa Vinner (1991):

> A imagem de conceito é algo não-verbal associado em nossa mente ao nome do conceito. Pode ser uma representação visual do conceito, caso o conceito tenha representações visuais; pode ser também uma coleção de impressões ou experiências. (VINNER, 1991, p. 68)

---

[5] Nesse texto traduzido como Pensamento Matemático Avançado (PMA).

Portanto, percebe-se que uma imagem de conceito está vinculada a um indivíduo específico. E a reação do aprendiz ao se deparar com certo termo pode depender ainda do contexto no qual ele está inserido no momento da apresentação. Nesse caso, Tall e Vinner (1981) introduzem a imagem mental evocada para descrever a parcela da memória utilizada em um determinado contexto. Para o autor a compreensão de um conceito passa pela formação de uma imagem de conceito associada ao objeto de conhecimento. Ao apresentar um conceito em matemática por meio de uma definição formal[6], espera-se (professores de Matemática) que o aprendiz forme ou construa imagens de conceitos associadas a essa definição para, assim, constatar que houve uma assimilação do conhecimento e, portanto, se ele compreendeu o conceito. A partir de então, ele poderá utilizar essa compreensão em diferentes contextos sem, por exemplo, fazer uso da definição formal. Dessa forma, entende-se que a imagem de conceito pode revelar elementos relevantes associados à compreensão e aprendizagem matemática.

A Definição de Conceito[7] é a descrição verbal ou não-verbal que explica o conceito (VINNER, 1991) sendo muito raramente semelhante às definições matemáticas formais associadas aos conceitos. A definição de conceito é dada pelo estudante por meio da descrição da imagem de conceito referente ao objeto de conhecimento apresentado. Essa descrição, em geral, pode revelar a ocorrência da imagem de conceito formada até o momento.

A definição de conceito, na prática, é o que estudante consegue expressar sobre seu entendimento da imagem de conceito referente ao objeto matemático. E, portanto, essa definição passa pelo refinamento e conversão das ideias mentais relativas à imagem de conceito. Quando um estudante se expressa sobre a integral de linha ele está descrevendo sua imagem formada a partir do conceito entendido sobre o objeto apresentado. É a definição de conceito, portanto, que o investigador consegue discutir quando se trata das compreensões matemáticas do estudante, pois são expressões que descrevem mais precisamente a imagem de conceito referente à integral de linha, por exemplo. Portanto, na definição de conceito registrada o pesquisador deve observar os vestígios que indicam possibilidades de aprendizagem ou novas compreensões matemáticas sobre o objeto em estudo.

Essa teoria apresentada sugere, em particular, que a abordagem de um conceito matemático deve incluir diferentes representações, quando possível, no sentido de propiciar a realização de conexões entre as unidades cognitivas[8] (TALL; BERNARD, 1997 *apud* GIRALDO, 2002) e, dessa

[6] Entende-se aqui por definição formal aquela aceita pela comunidade matemática dentro de um dado contexto social, histórico e teórico.
[7] Neste texto utiliza-se a formulação na qual a definição de conceito está incluída na imagem de conceito.
[8] Unidade cognitiva seria cada porção da estrutura cognitiva associada a um dado conceito, no qual o indivíduo é capaz de focar atenção de uma vez. (GIRALDO, 2002)

forma, enriquecer a imagem de conceito. A visualização, por exemplo, é um processo através do qual novos estímulos são estabelecidos.

Dreyfus (1991) revela que em muitos processos, os aspectos matemáticos e psicológicos podem ser raramente separados entre si. É esta ligação entre a Matemática e a Psicologia que tornam os processos interessantes e relevantes para a compreensão da aprendizagem e pensamento em matemática avançada. Portanto, explorar as experiências matemáticas dos estudantes diante de diferentes estímulos pode revelar elementos sobre a atividade de aprender matemática.

A visualização, por exemplo, é um processo pelo qual as imagens ou representações mentais ganham existência, diz Dreyfus (1991). Mariotti e Pesci (1994 *apud* COSTA, 2002), chamam de visualização o pensar espontaneamente acompanhado e apoiado por imagens. Zimmermann e Cunningham (1991 *apud* COSTA, 2002), dizem que a visualização está relacionada com os mais diversos ramos da Matemática e é multifacetada – com raízes na Matemática e com aspectos históricos, filosóficos, psicológicos, pedagógicos e tecnológicos importantes. A visualização não é mais relacionada simplesmente aos efeitos ilustrativos, mas também pode ser reconhecida como um componente chave do raciocínio na resolução de problemas e mesmo em provas matemáticas (ARCAVI, 2003).

A visualização dos objetos matemáticos nessa pesquisa foi proporcionada pelo *software Maple* em algumas tarefas realizadas pelos estudantes. E duas dessas tarefas serão consideradas nesse artigo para discussão. Essas noções apresentadas nortearam nossa investigação.

Metodologia de pesquisa

A presente pesquisa caracteriza-se como uma abordagem qualitativa de investigação que engloba os aspectos metodológicos de experimentos de ensino. A forma descritiva de obter os dados, o contato direto do pesquisador com o objeto de estudo, a valorização do processo e não somente do produto final e a descrição das perspectivas dos sujeitos pesquisados determinaram essa escolha (BOGDAN; BIKLEN, 2013).

Os participantes eram estudantes universitários de um curso de Física, cujos pseudônimos foram Misa, Livia, Isaac, Vilmara e Kira. Realizaram-se encontros entre estudantes e pesquisador. Esses encontros constituíram duas etapas: Na etapa 1 foram aplicados um questionário escrito e duas atividades com questões sobre alguns conceitos físicos e matemáticos prévios. Na etapa 2 foram aplicadas mais duas tarefas e uma entrevista individual, com o objetivo de identificar elementos que constituem a imagem de conceito a partir das definições de conceito, referentes à integral de linha de campos vetoriais e que surgiram quando esta era interpretada fisicamente como trabalho realizado. Além disso, procurou-se reconhecer nas escritas as possíveis relações com a produção de respostas dadas à entrevista.

O material coletado para análise está presente: nas respostas escritas fornecidas por cada participante às questões propostas nas tarefas; nas respostas escritas fornecidas pelos grupos às questões propostas nas tarefas; nas transcrições das gravações em vídeo do diálogo gerado entre os membros dos grupos e nas transcrições das gravações em vídeo fornecidas por cada participante às questões propostas na entrevista final.

Nesse artigo será feita uma análise de alguns elementos acerca da visualização gerados durante a segunda etapa da pesquisa, bem como a discussão sobre algumas respostas dos estudantes já aprovados na disciplina de Cálculo III[9]. A escolha de sujeitos com este perfil para o trabalho em questão justifica-se pelo seguinte: os estudantes já tinham uma imagem de conceitos (integral de linha) formada a partir de ensino e avaliação tradicionais. Como será demonstrado mais adiante, mesmo aprovados em tal disciplina, os sujeitos de pesquisa não possuíam um entendimento matematicamente esperado. O estímulo através da visualização pressupunha que houvesse uma modificação nas imagens de conceito sobre integrais de linha. A visualização proporcionada pela utilização do *Maple,* em algumas questões, teve como objetivo inicial estimular sob o aspecto visual, contudo, parece ter contribuído para ativar outras partes da imagem de conceito referente à integral de linha de campos vetoriais. Em algumas respostas foram identificados vestígios que sugeriam uma ampliação do conceito de integral de linha (maior abstração) sem limitar-se exclusivamente a uma interpretação física.

Assim, o artigo centralizará as discussões no processo de visualização proporcionada pelo uso do *Maple* e as possíveis modificações nas imagens de conceito registradas durante a análise. Serão apontados, nas tarefas com visualização, vestígios que permitiram indicar a ocorrência de novas compreensões sobre o objeto matemático.

Resultados e discussão

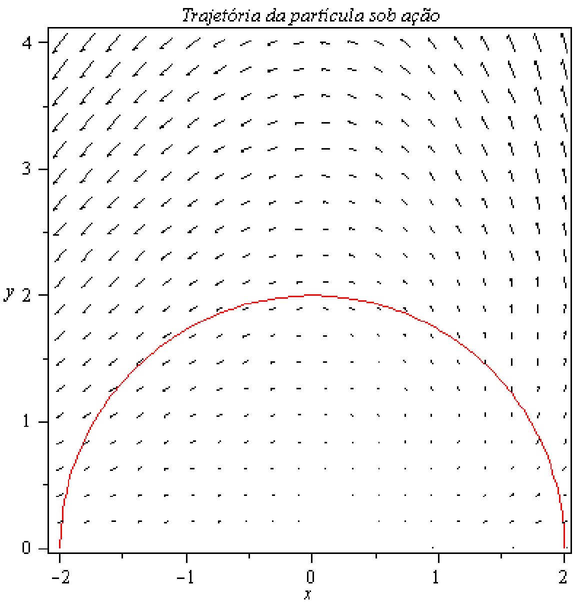
Durante a pesquisa uma tarefa proposta aos estudantes (FERREIRA, 2013) era sobre o movimento de uma partícula ao longo de um caminho C sob a ação de um campo vetorial $\boldsymbol{F}$. O trabalho realizado poderia ser calculado por: $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$. E no caso da questão proposta essa integral resultaria em um número positivo.

[9] Cálculo Diferencial e Integral III: disciplina matemática ofertada em uma Instituição de Ensino Superior de Juiz de Fora, que possui integral de linha de campos vetoriais na ementa.

Um especialista conseguiria falar sobre os possíveis significados do resultado numérico da integral ao calcular. Por outro lado, questiona-se como é possível favorecer um aprendiz a pensar sobre essa constatação em termos dos objetos matemáticos envolvidos.

A figura 1, abaixo, é resultado de um processo de construção no *Maple* da trajetória de uma partícula descrita pela curva sob a ação do campo vetorial dado.

Figura 1 – o campo vetorial dado e a curva representadas no *Maple*



Fonte: Dados da Pesquisa

Abaixo um diálogo relatado durante a realização dessa animação:

[Isaac] O movimento está da direita para a esquerda... E as setinhas também estão nessa direção...

[Misa] Então isso significa que...

[Isaac] Os vetores têm a mesma direção do movimento... O sentido das forças é o mesmo do movimento...

[Misa] Por isso que a integral é positiva?

[Isaac] Acho que sim!

[Misa] Claro! Aquele produto escalar do vetor força $\boldsymbol{F}$ e vetor deslocamento $d\boldsymbol{r}$ formam ângulo menor que 90 graus...

[Isaac] Ah, sim... Então o produto é positivo!

[Misa] Bacana cara!

Esse diálogo sugere que é possível promover novas compreensões matemáticas por meio da visualização do objeto matemático contribuindo, assim, para o enriquecimento abstrato do conceito envolvido. Essa foi uma constatação relevante da pesquisa. No caso da visualização, conseguiu-se identificar, nas respostas, indícios da potencialidade de exploração desse processo cognitivo. Foi o caso de uma questão que propunha a animação realizada pelo movimento da partícula segundo uma curva sob a ação de um campo vetorial. Essa animação realizada no *Maple* estimulou o reconhecimento do sinal (operatório) da integral sobre essa curva. Veja a questão originalmente proposta, tal como no Quadro 1:

Quadro 1 – A questão proposta

Considere o campo vetorial: $\boldsymbol{F}(x,y) = x^2\boldsymbol{i} - xy\boldsymbol{j}$. a) Suponha que seja um campo de força. Determine o trabalho feito por esse campo ao se mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo *C:* $r(t) = cos(t)\,i + sen(t)j, 0 < \mathrm{t} < \pi/2$. Utilize o CAS. b) O valor de $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ encontrado admite qual sinal? O que isso pode significar? c) Vamos visualizar o campo vetorial e o caminho da partícula apresentados na letra (a) num mesmo plano através do CAS. Faça uma animação e explique a relação do movimento da partícula e o campo confrontando sua resposta com a letra (b).

Fonte: Dados da Pesquisa

Pode-se identificar no diálogo evidências que indicam a potencialidade da visualização no estímulo de diferentes partes da imagem de conceito, pois os estudantes fizeram uma análise do integrando e não apenas da integral e seu valor, ou seja, apresentaram algum entendimento sobre a natureza abstrata do objeto. Essa animação realizada no *Maple* estimulou o reconhecimento do sinal (operatório) da integral sobre a curva não somente pela ideia de trabalho em Física, mas também pelo conceito de produto escalar entre os vetores $\boldsymbol{F}$ e $d\boldsymbol{r}$.

A animação/manipulação realizada no *Maple*, a partir da atividade orientada, gerou algumas discussões entre os estudantes através dos diálogos registrados na investigação. Nesses diálogos foi possível identificar alguns vestígios sobre as concepções matemáticas dos estudantes sobre o objeto em questão, além de possibilitar a construção de um quadro de elementos fecundos que coloca a visualização como um componente para o desenvolvimento do raciocínio em problemas.

Nas tarefas dessa natureza, algumas sintaxes dos comandos do *Maple* eram repassadas aos estudantes, pois não conheciam o *software* plenamente. O uso do *software* serviu para fazer intervenções que permitiram analisar as imagens de conceito, que é o objeto central da pesquisa, de modo que os auxílios citados não eram relevantes.

Por outro lado, a visualização pode, ainda, favorecer a geração de questões de caráter matemático sobre o objeto. É o caso da representação gráfica de um campo vetorial como um campo de força. Um campo de força pode ser modelado, ou representado, através de um campo vetorial. Para os cientistas essa afirmação é óbvia. Entretanto, no ensino, essa constatação pode revelar a dificuldade do estudante em compreender um conceito matemático exclusivamente pela definição formal (forma abstrata). Uma interpretação do conceito não é o conceito. Por exemplo, o trabalho pode ser calculado pela integral de linha de campos vetoriais, mas a integral de campos vetoriais não é necessariamente trabalho. De maneira análoga, campo de força pode ser representado por um campo vetorial, mas campo vetorial não é campo de força. Portanto, a precisão matemática do conceito descrito na definição formal deve ser explorada de tal modo que seja possível para o aprendiz compreender mais precisamente, do ponto de vista matemático, os elementos abstratos que constituem essa definição.

A proposta de integrar ferramentas para facilitar a visualização no processo de ensino e aprendizagem pode ser, no mínimo, enriquecedora, pois favorece a ligação entre as imagens mentais e as imagens matemáticas (DREYFUS, 1991). E, nesse caso, é necessário estar aberto a possíveis questões imprevisíveis e conflituosas como no caso destacado. Durante a realização dessas tarefas não foi tão raro a necessidade de parar para discutir as questões emergentes, interrompendo a continuidade das tarefas, porém enriquecendo as compreensões matemáticas pelas discussões.

A visualização proporcionada pelo *Maple* foi um componente relevante para o raciocínio matemático na resolução de problemas. Como no caso do sinal operatório da Integral de Linha, percebeu-se como as discussões surgiram mais espontaneamente a partir da visualização da Integral. Observe as respostas de Misa e Livia no item b da questão proposta segundo o quadro 1 acima:

[Misa e Livia] Sinal negativo. Isso significa que o sentido do trabalho no plano é contrário ao sentido do campo de força.

Numa outra questão a pergunta era a seguinte: "Descreva com suas palavras em qual situação $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr}$ será zero." Nesse caso Misa e Livia responderam assim:

[Misa e Livia] O trabalho será zero quando a partícula não mais se desloca devido à força aplicada.

Percebe-se que os(as) estudantes consultam a imagem de conceito por eles(as) entendida. Mas não se encontrou respostas que evocassem a definição formal de integral de linha onde aparece o produto escalar de duas grandezas vetoriais, $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{dr}$. Isto é, se o estudante tivesse uma imagem de conceito mais próxima da definição formal de integral de linha de campos vetoriais isso se revelaria em respostas contendo a condição de ortogonalidade entre vetores como justificativa matemática para a integral nula. Embora na definição formal apareça o produto escalar $\boldsymbol{F.dr}$, a pesquisa sugere que os estudantes não conseguem atribuir, na resposta, indícios desse produto. Percebe-se, sobretudo, que os estudantes se restringem ao significado da integral de linha de campos vetoriais no campo da Física e justificam o valor nulo da integral pelo conceito de trabalho e não pela definição matemática formal. Apesar de os estudantes serem apresentados à definição formal, a pesquisa sugere que eles não a consultam em determinados contextos, como o caso da questão posta na pesquisa.

Entretanto, a resposta sugere a constatação de que houve produção matemática por parte dos estudantes. E, nesse caso, há concordância com Arcavi (2003) ao ressaltar a importância da visualização não somente para efeitos ilustrativos, mas também pelo reconhecimento desse processo como uma componente chave do raciocínio. É possível apontar, a partir dessa discussão, a relevância de explorar conceitos nos seus vários aspectos (teóricos, procedimentais e técnicos) sem afetar a aprendizagem do objeto em questão.

Agora, questiona-se se a definição matemática formal – isto é, a forma abstrata do objeto – é compreensível aos aprendizes em Matemática. Veja o que o estudante revelou na entrevista final da pesquisa sobre as definições matemáticas:

[Pesquisador] A definição formal do integral de linha de campos vetoriais foi apresentada antes e depois das atividades. Em que momento você compreendeu melhor essa definição? Explique.

[Livia] Eu tenho um problema muito grande com a matemática. O que é a representação? Se eu pegar a matemática e a física, a física tem um monte de contas, mas tem uma teoria que explica. Muitas vezes a teoria na física ajuda. Na matemática você vai estudar o Cálculo, ele tem uma definição, tem uma função, escreve alguma coisa... Mas eu não consigo abstrair. Por causa dessa dificuldade que eu tenho. Definição assim é problemático para mim. Em dupla era possível escrever alguma coisa, mas eu sozinha, ler e entender, era difícil. Esse tipo de definição se não tiver nada antes eu não consigo entender.

Esse registro sugere em que medida uma definição formal matemática inicialmente pode evocar de entendimento para os estudantes. A definição formal talvez ainda seja pouco compreensível para os aprendizes mesmo em níveis avançados, como é o caso desses estudantes que já haviam sido apresentados à integral de linha durante o curso no semestre anterior, como conteúdo matemático de ensino da ementa da disciplina Cálculo III. A compreensão dos objetos na precisão matemática da definição formal de integral de linha está, de acordo com o registro acima, somente para o professor.

A definição formal da integral de linha de campos vetoriais é matematicamente precisa. Entretanto, em sala de aula, onde se inicia um processo de aprendizagem, talvez seja necessário um trabalho com diferentes estímulos para que haja novas compreensões sobre o objeto matemático. Uma interpretação física para o objeto matemático pode ser útil, mas apenas a interpretação, sem explorar os elementos matemáticos da definição precisa, também pode gerar conflitos na imagem de conceito, restringindo seu entendimento para contextos específicos. Portanto, entende-se que seja possível modificar a imagem de conceito referente ao objeto matemático apresentado por meio da visualização, por exemplo. E que a apresentação da definição formal como único elemento esclarecedor do conceito matemático pode ser insuficiente.

Outra atividade na pesquisa propunha a construção no *Maple* de um campo vetorial e uma curva. Nessa atividade o objetivo era levantar elementos da imagem de conceito sobre a visualização gerada. E novamente os estudantes utilizaram as expressões trabalho e campo de força nas suas respostas. A atividade proposta é:

Seja $\boldsymbol{F}(x, y) = (x - y)\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j}$, *C* é o arco de círculo $x^2 + y^2 = 4$ percorrendo no sentido anti-horário de $(2,0)$ a $(0, -2)$. Use o gráfico do campo vetorial e a curva para dizer se a integral de linha de $\boldsymbol{F}$ ao longo de *C* é positiva, negativa ou nula. Explique.

*> F:=fieldplot([x-y,x*y],x=-2..2,y=0..4):*

*> r:=animatecurve([2*cos(t),2*sin(t),t=0...Pi],frames=100):*

>display({F,r},axes=boxed,scaling=constrained,title=Trajetória da partícula sob ação do campo):

[Misa] A integral de linha ao longo de *C* é positiva, pois $\boldsymbol{F}$ acompanha o sentido das linhas de força.

[Livia] Nula, pois a trajetória descrita pela partícula tem o mesmo sentido que o campo de força, e para que haja trabalho o sentido deste deverá ser outro ao do campo de força.

Vemos duas respostas distintas na questão anterior. Tanto na justificativa quanto na resposta do sinal operatório da integral. Porém notou-se nas duas respostas colocações igualmente tratadas numa perspectiva gráfico-visual. Esses aspectos são revelados nas expressões: "acompanha o sentido das linhas de força" e "mesmo sentido que o campo de força". Além disso, a palavra trabalho foi evocada novamente como justificativa do sinal.

A descrição daquilo que estão visualizando contribui para a reconstrução prévia e intuitiva de elementos que constituem o conceito matemático de integral de linha, embora ainda perceba-se a dificuldade por parte dos estudantes em descreverem os objetos matemáticos visualizados pelas próprias palavras e entendimentos. Na aplicação das tarefas frequentemente ouvia-se: "O que devo escrever aqui?" ou "Explicar de acordo com a definição?". Isso confirma o que algumas pesquisas já revelaram sobre o ensino tradicional vigente priorizando um único aspecto em detrimento de outro. Os estudantes estão acostumados com problemas matemáticos de natureza exclusivamente procedimental. Quando são colocadas outras atividades para pensarem, sentem-se desconfortáveis em escrever.

Todavia, entende-se que esse amontoado de expressões descritas nas respostas sugere a existência de uma produção matemática diferente por parte dos estudantes. E, nesse caso, há concordância com Arcavi (2003) ao ressaltar a visualização não somente para efeitos ilustrativos, mas também pelo reconhecimento desse processo como uma componente do raciocínio. A visualização do objeto permitiu que a discussão sobre o procedimento ocorresse. Disparou elementos geradores de discussão e apontou novas questões sobre a integral de linha.

É possível destacar, a partir dessa discussão, a relevância de explorar conceitos nos seus vários aspectos (teóricos, procedimentais e técnicos) sem afetar a assimilação precisa do objeto em questão. A visualização permite explorar a definição formal da integral de linha de campos vetoriais sem ter que tratá-la exclusivamente como trabalho.

Algumas Conclusões

A divulgação desses resultados pode auxiliar professores no planejamento de aulas, organização de ambientes de aprendizagem e conhecimento das possibilidades, bem como pela intervenção através de um *software* de matemática como estratégia alternativa na aprendizagem de Cálculo.

Dentre algumas impressões obtidas pelos pesquisadores sobre os registros aqui descritos, destacamos como diferentes abordagens de conceitos matemáticos avançados podem modificar ou enriquecer as imagens de conceito dos estudantes. Diferentes respostas dadas ao explorar o conceito de integral de linha de campos vetoriais revelaram como um estímulo diferente daquele dado na apresentação formal da definição do objeto permite a construção de diferentes compreensões matemáticas.

Em Matemática ou Física há a possibilidade de calcular o trabalho realizado para deslocar uma partícula numa trajetória descrita por uma curva sob a ação de um campo de forças. Essa aplicação da Integral de Linha de Campos Vetoriais pode auxiliar bastante na compreensão dos diversos objetos matemáticos envolvidos na definição como, por exemplo, o produto escalar entre vetores. E quando explorado sob uma abordagem visual parece, pelas discussões relatadas, que os objetos matemáticos envolvidos surgem de modo mais intuitivo.

Os participantes da pesquisa trataram inicialmente a integral de linha de campos vetoriais como um conceito físico. Porém, isso pode restringir a compreensão do conceito matemático (abstrato) por parte do aprendiz a contextos específicos. Uma razão para esse tratamento seria o contexto acadêmico no qual o estudante da pesquisa está inserido. São estudantes de Física. Portanto, as análises deste artigo sugerem que os participantes possuem imagens de conceito relacionadas a integral de linha. Entretanto, parece que essas imagens eram restritas ao conceito de trabalho realizado. A definição formal (o objeto matemático em sua forma abstrata) foi abandonada durante algumas atividades, o que levou a respostas mais distantes daquela aceita pela comunidade matemática: os estudantes optaram em dar um significado físico à integral de linha de campos vetoriais ao invés de entendê-la e manipulá-la abstratamente.

Observa-se, no entanto, que depois de explorar o conceito de integral de linha no *Maple,* por meio da visualização, foi possível reconhecer nas respostas escritas novas evidências de elementos presentes na definição matemática do objeto. Expressões como: "acompanha o sentido das linhas de força" e "mesmo sentido que o campo de força" sugerem aproximações com a definição formal quando esta descreve de modo preciso, matematicamente, que essa integral depende apenas do campo, do traço da curva e de sua orientação: isto é, percebeu-se resquícios de abstrações quanto à natureza do objeto. O estímulo visual proporcionado pelo *software* enriqueceu/modificou as imagens de conceito referentes à integral de linha de campos vetoriais.

Essa constatação pode apontar, considerando o contexto dos participantes, a relevância de elaborar estratégias de ensino. A pesquisa revelou que houve enriquecimento/modificação das imagens de conceito referentes à integral de linha em estudantes que já tiveram contato com ela anteriormente, mas através do ensino tradicional. Isto sugere que tal estratégia pode ser adotada com estudantes que são apresentados pela primeira vez ao objeto matemático, isto é, quando estudado pela primeira vez.

O processo de visualizar o objeto pela manipulação ou simulação ainda pode ser um componente do raciocínio em algumas tarefas matemáticas. Quando o participante descreveu o sinal operatório da integral pela simples observação visual dos sentidos dos vetores deslocamento e força, percebemos que ele raciocinou pelo produto escalar entre dois vetores e, dessa forma, pôde realizar o cálculo procedimental da integral já sabendo previamente do sinal. Ou seja, o estudante revelou (definição de conceito) um entendimento abstrato (imagem de conceito) antes de realizar os cálculos procedimentais típicos do ensino tradicional.

Em outra situação descrita, no entanto, a visualização gerou questões imprevisíveis e de caráter teórico da Física. Nesse caso foi necessária uma intervenção não esperada e sem motivação relevante para a pesquisa. E, apesar disso, ressaltamos essa possibilidade como um fator a considerar nessa estratégia de ensino. Portanto, o planejamento de aulas para conteúdos matemáticos avançados deve contemplar a precisão técnica matemática, mas também possibilitar o enriquecimento intuitivo dos conceitos envolvidos.

Os resultados da investigação, portanto, apontam determinadas posturas quanto às abordagens desses conteúdos em sala de aula. Sobretudo quando se trata da estrutura formal das definições matemáticas. Os estudantes sempre recorrem às diferentes interpretações dos conceitos a fim de tentarem fugir da consulta à definição formal (forma abstrata). Dessa forma, abordagens que exploram o aspecto visual podem atuar de forma efetiva nas imagens de conceitos dos estudantes levando a novos desdobramentos nas concepções da própria atividade de aprender matemática.

Por fim, entende-se que a estrutura formal da matemática precisa ser assimilada. Mas ao distinguir o objeto matemático de ensino do objeto matemático técnico, a Teoria das Imagens de Conceito (TALL; VINNER, 1981) sugere que essa assimilação não seja suficiente. Produzir matemática não é reproduzir sua organização formal. Essa organização formal é um estado presente da Matemática. E no processo de aprendizagem, esse estado deve ser desestabilizado possibilitando novas reconstruções do objeto de conhecimento.

Referências:

ARCAVI, Abraham. The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, n. 52, p. 215-241, 2003.

BOGDAN, R. BIKLEN, S. **A investigação qualitativa em educação:** uma introdução. Porto. PT: Porto, 2013.

COSTA, Conceição. Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização. Encontro da Seção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. ***Anais***... p. 257-273, Coimbra, Portugal, 2002.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, David (Org.). **Advanced mathematical thinking** (p. 25–41). Dordrecht: Kluwer, 1991.

FERREIRA, J.C. **Integral de Linha de Campos Vetoriais/Trabalho Realizado**: imagem de conceito e definição de conceito. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2013.

GIRALDO, V., CARVALHO, L.M., TALL, D.O., Conflitos Teórico-Computacionais e a Imagem Conceitual de Derivada. In: L.M. Carvalho; L.C. Guimarães. **História e Tecnologia no Ensino da Matemática.** v.1, p. 153 - 164, Rio de Janeiro, Brasil. 2003. Disponível em: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003b-giraldo-carv-rj.pdf> Acesso em: 25 out. 2011.

TALL, D. O. **Advanced Mathematical Thinking**. Londres: Kluwer Academic Publisher. 1991.

_____. The psychology of advanced mathematical thinking. TALL, David (Org.). **Advanced mathematical thinking** (p.61-75). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1991.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**. 12, p. 151-169, 1981.

VINNER, Shlomo. O papel das definições no ensino e aprendizagem de matemática. Trad. Márcia Pinto; Jussara Araújo. In: TALL, D. The Role of Definitios in the Teaching and Learning of Mathematics. **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. v. 5, p. 65 – 81. 1991.