

## **GEOGEBRA BOOK, SMARTPHONES E LADRILHAMENTOS NO PLANO**

## **GEOGEBRA BOOK, SMARTPHONES AND TILING IN THE PLANE**

Thiago de Azevedo<sup>1</sup>  
Agnaldo Esquincalha<sup>2</sup>  
Abel Rodolfo Garcia Lozano<sup>3</sup>

### **Resumo**

Considerando a importância da integração de tecnologias digitais em sala de aula, este texto objetiva apresentar o produto educacional GeoGebra Book intitulado “Ladrilhamento no Plano com o uso do *software* GeoGebra” em dispositivos móveis com telas sensíveis ao toque para explorar conceitos geométricos nos anos finais do Ensino Fundamental. Um GeoGebra Book é um livro digital, desenvolvido e disponibilizado gratuitamente na *web*, em que é possível, de maneira hipertextual, relacionar textos, vídeos, áudios, atividades desenvolvidas no GeoGebra, além de outros recursos digitais. O produto em questão consistiu de videotutoriais e atividades de ladrilhamento no plano utilizando polígonos regulares e irregulares com o GeoGebra. Foram realizados seis encontros com 40 alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental de uma escola pública, na Baixada Fluminense, para a implementação de sequências didáticas que exploraram videotutoriais e atividades de ladrilhamento com o GeoGebra. Foi possível perceber a efetividade do produto educacional, despertando o interesse dos alunos pelo pensar e fazer matemática de forma reflexiva, por meio de experimentações com o GeoGebra em *smartphones*.

**Palavras-chave:** Ladrilhamentos no Plano. GeoGebra Book. Videotutoriais.

### **Abstract**

Considering the importance of the integration of digital technologies in the classroom, this text aims to present the educational product GeoGebra Book titled "Tiling in the Plane with the use of GeoGebra software" in mobile devices with touch screens to explore geometric concepts in the final years of the Elementary School. A GeoGebra Book is a digital book, developed and made available for free on the web, in which it is possible, in a hypertextual way, to relate texts, videos, audios, activities developed in GeoGebra, as well as other digital resources. The product in question consisted of video tutorials and tiling activities in the plane using regular and irregular polygons with GeoGebra. Six meetings were held with 40 students from the eighth grade of a public school in the Baixada Fluminense, to implement didactic sequences that explored video tutorials and tiling activities with GeoGebra. It was possible to perceive the effectiveness of the educational product, arousing students' interest in thinking and doing mathematics in a reflexive manner, through experimentation with GeoGebra on smartphones.

**Keywords:** Tiling in the Plane. GeoGebra Book. Video Tutorials.

---

<sup>1</sup> Mestre em Ensino das Ciências - Unigranrio

<sup>2</sup> Doutor em Educação Matemática pela PUC-SP, Mestre em Modelagem Computacional pela UERJ, Especialista em Instrumentação para o Ensino de Matemática pela UFF e Licenciado em Matemática pela UFRRJ. Professor Adjunto do Departamento de Matemática da Faculdade de Formação de Professores da UERJ.

<sup>3</sup> Docente do Programa de Pós Graduação em Ensino das Ciências – Unigranrio. Professor Adjunto do Departamento de Matemática da Faculdade de Formação de Professores da UERJ.

## Introdução

Assumindo o pressuposto de que não faz mais sentido ao professor se questionar sobre utilizar ou não tecnologias digitais em suas práticas, mas sim, como utilizá-las de modo a aprimorar formas de pensar e fazer matemática, em particular, utilizando dispositivos móveis com telas sensíveis ao toque, *touchscreens*, desenvolvemos um GeoGebra Book para explorar o pensamento geométrico de alunos do Ensino Fundamental por meio do tema Ladrilhamentos no Plano.

Segundo Abar (2015, p. 1) “nos últimos anos, o *software* GeoGebra tem significado uma importante revolução, especialmente para professores de matemática, interessados na incorporação das tecnologias de informação e comunicação em sala de aula”. O GeoGebra Book é um recurso do GeoGebra que permite organizar de forma hipertextual e disponibilizar na web elementos como textos, vídeos, áudios e, em particular, aplicativos desenvolvidos com o GeoGebra, como um livro digital, interativo e com ordenação em capítulos.

Ladrilhar é uma forma de cobrir superfícies planas com figuras, regulares ou irregulares, colocando-as uma ao lado da outra, sem deixar regiões descobertas (OLIVEIRA, 2015). O tema ladrilhamento não faz parte do currículo escolar, mas pode perpassá-lo e fomentar o estudo de conceitos geométricos e suas propriedades ao longo da Educação Básica, principalmente nos últimos anos do Ensino Fundamental.

O ladrilhamento pode ser explorado por meio do uso de tecnologias digitais como o GeoGebra, favorecendo o trabalho do professor de Matemática, ao ilustrar e permitir levantamentos de conjecturas sobre conceitos matemáticos. Partimos do pressuposto de que o tema Ladrilhamento no Plano não precisa seguir uma ordem rigorosa, de forma que se pode orientar uma sequência de ladrilhamentos mais simples, a fim de tornar o estudo flexível.

Em relação à contribuição do uso dos dispositivos móveis com tecnologia *touchscreen*, como *tablets* e *smartphones*, Henrique (2017, p. 25) afirma que pode ser positiva, “facilitando o planejamento, o tipo de atividade a ser implementada, a organização da turma, além de ser algo que faz parte do uso diário dos estudantes, agregando o interesse na participação em atividades em que estes recursos sejam utilizados como fio condutor”.

Nessa perspectiva, entendemos que é possível explorar Ladrilhamentos no Plano por meio do GeoGebra em dispositivos móveis *touchscreen*, como um facilitador para a aprendizagem de conceitos geométricos, constituindo-se uma abordagem diferenciada e temporalmente situada.

O produto educacional aqui é apresentado se torna, nesse contexto, uma ferramenta para que o estudo do Ladrilhamento no Plano seja realizado de forma dinâmica e em sala de aula, independentemente da existência e bom funcionamento de laboratórios de informática e mesmo de

conexão com a internet, por meio da transferência das atividades disponíveis no GeoGebra Book desenvolvido pelos autores, por meio da tecnologia *bluetooth*.

Para a pesquisa de mestrado profissional, da qual origina o produto educacional em questão, foram produzidos videotutoriais e atividades no GeoGebra para que os sujeitos pesquisados, alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, pudessem desenvolver conhecimentos no campo da Geometria Euclidiana Plana, efetuando diferentes tipos de ladrilhamento no plano. O principal objetivo desse texto é apresentar o GeoGebra Book desenvolvido e as sequências didáticas elaboradas para o estudo de ladrilhamentos no plano e de alguns conceitos geométricos relacionados, por meio de sua utilização em dispositivos móveis *touchscreen*. Para isso, são apresentados a seguir os procedimentos metodológicos e realizada uma breve discussão a partir de dados coletados ao longo da realização das sequências didáticas.

### **Procedimentos metodológicos**

O GeoGebra Book intitulado “Ladrilhamento no Plano com o uso do *software* GeoGebra” foi criado gratuitamente a partir do sítio virtual do GeoGebra e está disponível ao público em <https://www.geogebra.org/m/Msxy4yf5>. É composto por videotutoriais do aplicativo para *smartphones* e de atividades propostas para realização no GeoGebra. Esses vídeos foram planejados com base na análise das respostas dos sujeitos da pesquisa de mestrado, 40 alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental de uma escola pública no município de Duque de Caxias/Rio de Janeiro, a partir de um questionário inicial que objetivou descobrir se os estudantes tinham o equipamento necessário para realização das atividades e, também, sua reação inicial ao contato com o GeoGebra, por meio de projeção em sala de aula.

Os capítulos do GeoGebra Book desenvolvido no contexto desse trabalho são: 1) apresentação do *software* GeoGebra no *smartphone*; 2) ladrilhando com retângulos e quadrados; 3) ladrilhando com hexágonos; 4) equivalência de áreas por meio do ladrilhamento com retângulos e quadrados previamente construídos; 5) ladrilhamento de hexágono regular com triângulos equiláteros; 6) ladrilhamento com polígonos regulares.

Para percorrer todos os capítulos, foram elaboradas sequências didáticas que foram trabalhadas ao longo de seis encontros com dois tempos de 50min cada. Estas ações foram planejadas tendo como ponto de partida a Engenharia Didática. Esse aporte teórico-metodológico origina-se da preocupação com certa inovação presente no campo educacional, que abre caminho para diversos tipos de experiências na sala de aula, advindas da fundamentação científica. Também está relacionada ao movimento da valorização do saber prático do professor, com a consciência de que as teorias que não se desenvolvem com o trabalho em sala de aula são insuficientes para

perceber a complexidade do sistema e para, de alguma forma, ter influência na transformação das tradições do ensino. Nesse sentido, a questão é afirmar a possibilidade de agir num sentido racional, com referência nos conhecimentos matemáticos e didáticos, dando destaque à importância da “realização didática” na sala de aula, como prática de investigação (ARTIGUE, 1994, 1996).

Azevedo (2017) apresenta com detalhes a pesquisa realizada. Neste texto estamos focados apenas na apresentação do produto educacional desenvolvido para a pesquisa, o GeoGebra Book “Ladrilhamento no Plano com o uso do *software* GeoGebra”. A seguir são descritos os encontros e atividades propostas com o uso do referido produto.

No primeiro encontro com a turma foi apresentado o tema Ladrilhamento e foi mencionado que as atividades seriam desenvolvidas com a ajuda do GeoGebra para *smartphones*, porém constatou-se algumas dificuldades para que os alunos entendessem suas ferramentas. A partir dessa percepção do docente/pesquisador, foram elaborados videotutoriais para que os alunos pudessem melhor compreender as funções e potencialidades do GeoGebra que seriam utilizadas nas atividades propostas em cada capítulo do livro digital. Os videotutoriais foram produzidos com o uso do aplicativo *DU Recorder*, para *Android*, que grava a tela do *smartphone* e a voz de seu usuário. Dessa forma, o docente/pesquisador poderia mostrar o que queria por meio da manipulação do GeoGebra para *smartphone* e narrar o que estava sendo realizado.

No segundo encontro foi, então, projetado um vídeo apresentando as ferramentas principais do GeoGebra. Nesse primeiro vídeo foram apresentadas atividades para a construção de alguns entes geométricos como reta, segmento de reta, semirreta, ângulos e polígonos. Esses conceitos ainda não eram de conhecimento de parte dos alunos.

No segundo vídeo foi apresentada a ideia de ladrilhamento e foi proposto que os alunos fizessem alguns ladrilhamentos simples com retângulos e quadrados. Porém, alguns alunos não sabiam construir retângulos ou não conheciam suas propriedades. Então, para o próximo encontro, foi construído um videotutorial ensinando a construir um retângulo no GeoGebra e, em seguida, o vídeo explica como ladrilhar com retângulos e quadrados.

No terceiro vídeo houve a proposta de que os alunos tentassem fazer ladrilhamentos com polígonos regulares, nesse caso, com hexágonos. Eles puderam visualizar os hexágonos e compreender não só a construção, mas algumas de suas propriedades.

No quarto vídeo, foi proposto que ladrilhassem uma região quadrangular com retângulos e quadrados. O objetivo do vídeo era ajudar ao aluno a entender como movimentar os polígonos, incluindo como rotacioná-los e arrastá-los.

No quinto vídeo houve a proposta de que os alunos tentassem ladrilhar um hexágono regular com triângulos equiláteros, de forma que percebessem que a área dos seis triângulos

equiláteros era equivalente a área do hexágono regular, triângulos e hexágonos com mesma medida de lado.

No sexto vídeo foi proposto que os alunos fizessem ladrilhamentos com polígonos regulares, de modo que poderiam usar os polígonos regulares que quisessem, porém não poderiam contrariar a ideia de ladrilhar, ou seja, as figuras não poderiam se sobrepor e não poderia sobrar espaços entre as figuras.

## Discussão

A seguir é feita uma breve discussão, a partir dos dados registrados no diário de campo do docente/pesquisador, primeiro autor do trabalho, e de trechos das falas dos estudantes, também registradas pelo pesquisador, durante a realização das sequências didáticas nos seis encontros realizados para explorar o GeoGebra Book, após a apresentação dos videotutoriais, projetados em sala de aula. Para preservar a identidade dos alunos, nos referimos a eles por meio de seus números no diário de classe.

No decorrer do desenvolvimento das atividades, os participantes se mostraram ativos e interessados, como já apontado por Henrique (2017). O fato de utilizar o celular, normalmente com uso proibido em sala de aula, para explorar atividades matemáticas realmente motivou os alunos que, mesmo com alguma dificuldade, procuraram compreender os conceitos geométricos explorados nas sequências didáticas.

Quando o primeiro vídeo foi apresentado os alunos rapidamente mostraram entender a função das ferramentas apresentadas, inclusive a maior parte deles já ia experimentando o aplicativo para saber o que poderia ser construído e, de forma natural, se deu a apropriação de termos como semirretas, polígonos, ângulo interno, polígono regular, congruência e reflexão, por exemplo. Os alunos fizeram diversas perguntas para saber qual era o significado de termos matemáticos presentes nos botões de comando do GeoGebra e, com isso, foi possível retomar conceitos, aprofundá-los e apresentar novos.

Com o apoio do segundo vídeo foi possível apresentar alguns conceitos sobre os quadriláteros, pois os alunos ainda desconheciam várias de suas propriedades. Alguns deles ainda apresentavam dificuldades em reconhecê-los, por exemplo. Após a apresentação do segundo vídeo com a construção de um retângulo, houve a seguinte discussão:

Aluno 6: Professor por que é tão difícil construir aquele quadrado ali?

Professor: Tem certeza que a figura é um quadrado? O que caracteriza um polígono para que o possamos chamá-lo de quadrado?

Aluno 6: Verdade. Para ser quadrado tem que ter quatro lados iguais e quatro ângulos retos. Então, essa figura não é quadrado, você disse que era um retângulo.

Nesse momento, alguns alunos comentaram que no vídeo já havia sido dito o nome da figura, porém o Aluno 6 afirmou que não havia entendido a diferença entre retângulo e quadrado e que confundiu o termo quadrilátero com quadrado. Essa foi a oportunidade para o pesquisador retomar as definições de quadrado e retângulo.

Com ajuda do terceiro vídeo foi possível levar os alunos a não só conhecerem o que é um hexágono, mas a compreender o que é um polígono regular e entender como calcular a medida de seu ângulo interno. Eles desconheciam os conceitos de ângulo interno e externo, e apresentaram grande dificuldade para saber se era possível fazer ladrilhamentos com os hexágonos regulares, como mostra o trecho abaixo.

Professor: será possível ladrilhar com hexágonos regulares? Por quê

Aluno 30: Pelo que vi no vídeo é possível, mas eu não sei por qual motivo é possível. Acho que é só porque dá para encaixar as figuras.

Aluno 12: Eu sei que dá. Mas, acho que deve ter alguma coisa a ver com os ângulos da figura.

Nesse momento, alguns já foram manipulando as construções no *smartphone* e percebendo que era possível sim fazer o ladrilhamento com os hexágonos regulares, porém nenhum aluno soube explicar o porquê.

Foi sugerido, então, que pensassem nos ângulos internos e externos dos polígonos para que pudessem compreender os motivos pelos quais o ladrilhamento seria possível, esse assunto foi retomado posteriormente, sem o uso do GeoGebra, por uma questão de tempo.

No quarto vídeo foi proposto aos alunos que tentassem ladrilhar uma região quadrangular com dois retângulos e dois quadrados, com o intuito de que os alunos compreendessem a ideia de equivalência de áreas. Eles deveriam movimentar as figuras para verificar se seria possível ladrilhar a região quadrangular apresentada. Após a exibição do vídeo foram feitos os seguintes comentários:

Aluno 16: Eu consegui! As figuras menores cabem dentro do quadrado grande. As quatro figuras juntas dão igual a maior.

Aluno 7: Eu acho que uma cabe dentro da outra porque as áreas devem ser iguais. A área é a medida de dentro da figura? É isso?

Nesse momento, o professor/pesquisador perguntou a turma se eles concordavam com o aluno 7, e esses foram unânimes em relação ao fato de ele está correto. Ainda que de maneira informal, ficou explícito que os estudantes conseguiram compreender a gênese da atividade.

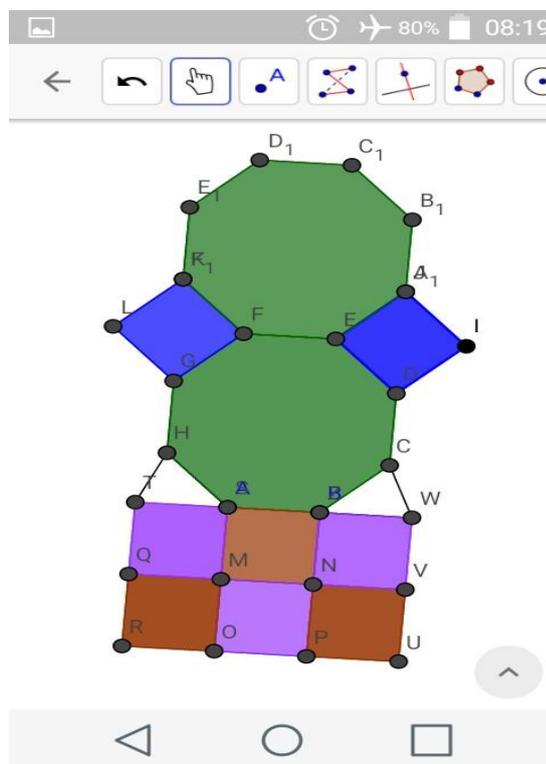
No quinto videotutorial houve a proposta de se fazer o ladrilhamento de uma região com formato de hexágono regular. O vídeo mostra um hexágono regular e seis triângulos equiláteros menores, mas de lado com mesma medida que o lado do hexágono regular. Os alunos deveriam movimentar os triângulos com o intuito de perceber se era possível fazer o ladrilhamento. Rapidamente perceberam que sim e, sobre isso, o professor/pesquisador perguntou a qual conclusão os alunos chegaram. Abaixo, seguem algumas respostas:

Aluno 38: Já sei. As áreas são equivalentes.

Aluno 20: Eu sei que as áreas são equivalentes. Mas, acho que só dá para ladrilhar porque os triângulos têm os lados de medida igual ao hexágono. Se fosse diferente não dava.

No último vídeo foi proposto aos alunos que construíssem um ladrilhamento qualquer com polígonos regulares. No vídeo foi apresentado um ladrilhamento feito com dodecágonos e triângulos equiláteros, para que pudessem entender a atividade proposta. Destacamos uma construção realizada por um dos alunos, apresentada na figura 1.

**Figura 1:** Impressão de tela de construção realizada por um aluno.



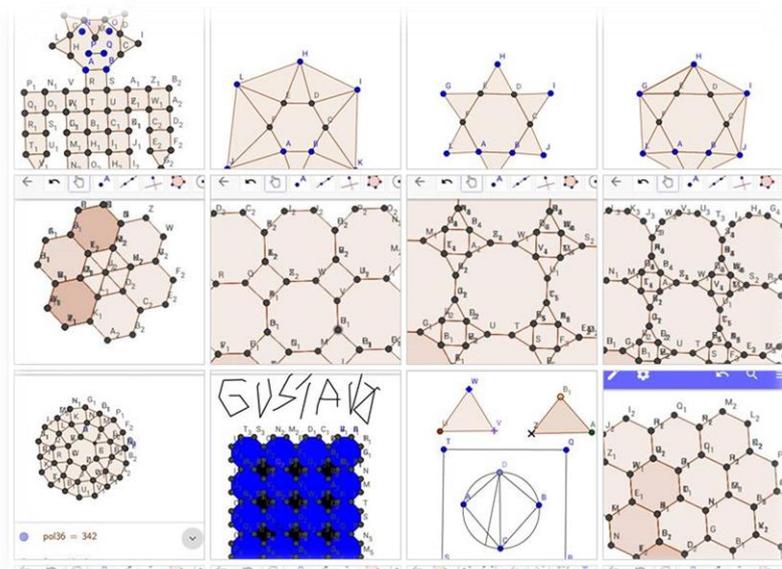
Fonte: dado da pesquisa.

Nessa construção é possível perceber que o aluno não conseguiu fazer o ladrilhamento com as figuras regulares como solicitado. Ele pode não ter entendido que o ladrilhamento era com polígonos regulares ou, por não conseguir fazer o encaixe das figuras, pode ter usado triângulos não equiláteros para preencher os espaços vazios. Tal construção pode evidenciar também uma compreensão equivocada sobre as medidas dos ângulos internos dos polígonos utilizados pelo estudante.

Apesar do exemplo apresentado ser o de uma construção que não atende ao que foi solicitado, apenas para que salientássemos a importância sobre produções de alunos, quase todos eles conseguiram realizar as atividades propostas de maneira satisfatória e, ao fim dos encontros, apresentaram maior interesse pelas aulas e solicitaram mais uso do *smartphone* nas aulas de

Matemática. Na figura 2 apresentamos uma imagem com várias impressões de telas dos *smartphones* de alguns alunos que realizaram adequadamente algumas das atividades propostas.

**Figura 2:** Ladrilhamentos produzidos por diferentes alunos no GeoGebra.



Fonte: dados da pesquisa.

Um fato interessante a ser destacado é o reconhecimento de alguns ladrilhamentos trabalhados em sala de aula em momentos de lazer. Um aluno, inclusive, fotografou e mostrou ao professor uma construção realizada na hora do recreio, semelhante a uma atividade desenvolvida em sala de aula, mas com biscoitos, como mostra a figura 3. O aluno reconheceu o formato hexagonal de seus biscoitos e produziu um ladrilhamento.

**Figura 3:** Ladrilhamento com biscoitos, construído por aluno.



Fonte: dados da pesquisa.

Por meio dessa imagem, é possível ter a noção de que os conhecimentos matemáticos aprendidos na escola podem ser entendidos pelos alunos de uma maneira ampla, ou seja, eles podem perceber o quão abrangente pode ser o conhecimento matemático, e que está presente nas nossas vidas, mesmo nos momentos mais informais.

Os resultados da pesquisa apontam que o GeoGebra Book foi eficiente em seu propósito de explorar conceitos geométricos e suas propriedades por meio de um tema que não está no currículo, mas que explora de forma explícita conceitos importantes que devem ser desenvolvidos nos anos finais do ensino fundamental.

### Considerações finais

Este texto objetivou apresentar um livro digital interativo e gratuito, desenvolvido no âmbito de uma pesquisa de mestrado profissional, constituído como um GeoGebra Book, com vídeos e atividades elaboradas no GeoGebra para *smartphones* sobre ladrilhamentos no plano, para exploração de conceitos geométricos nos anos finais do Ensino Fundamental.

O acesso ao referido produto educacional é gratuito, podendo ser utilizado como originalmente desenvolvido, ou ainda, ser modificado livremente por qualquer professor que se interesse em utilizá-lo com seus alunos, sem a necessidade de autorização dos autores. A possibilidade de reprodução das sequências didáticas, bem como um possível aprimoramento técnico ou aprofundamento conceitual são elementos motivadores para a criação, uso ou modificação de GeoGebra Books, sendo necessária apenas uma conta na plataforma gratuita e multiplataforma do GeoGebra.

Esperamos que este trabalho tenha evidenciado possibilidades de uso efetivo e com bons resultados do trabalho com *smartphones* nas aulas de matemática, caracterizando-os como elementos potencializadores do fazer matemática dentro e fora da escola.

### Referências

- ABAR, C. A. A. P. **Como criar ou utilizar um GeoGebra Book**. Disponível em: <<http://semur.edu.uy/curem5/actas/pdf/141.pdf>>. Acesso em: 10 ago. 2016.
- ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget/Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 193-217.
- ARTIGUE, M. Didactical Engineering as a framework for the conception of teaching products. In: BIEHLER, R.; SCHOLZ, R.; STRÄSSER, R.; WINKLEMANN, B. **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.
- AZEVEDO, T. G. **Ladrilhamento no plano com uso do software GeoGebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências) – Universidade do Grande Rio. Duque de Caxias. 2017.

HENRIQUE, M. P. **GeoGebra no Clique e na palma das mãos: Contribuições de uma dinâmica de aula para Construção de Conceitos Geométricos com Alunos do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica. 2017.

OLIVEIRA, J. F. M. **Pavimentações no Plano Euclidiano**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 2015.