RECM
REVISTA DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PASSEANDO EM GRAFOS: UMA ABORDAGEM DE TEORIA DE GRAFOS NO ENSINO MÉDIO*

WALKING IN GRAPHS: AN APPROACH OF GRAPH THEORY IN HIGH SCHOOL

Telma Pará[1]
Simone Dantas[2]
Cecilia de Alcantara[3]
Isabel Gonçalves[3]

Resumo

A Teoria de Grafos é um ramo da Matemática Discreta ainda pouco explorado na Educação Básica. O objetivo deste trabalho é mostrar a viabilidade do ensino desta disciplina no Ensino Médio através de uma proposta de atividade envolvendo elementos do cotidiano comconteúdos sobre caminhos Hamiltonianos e passeios Eulerianos. A metodologia de pesquisa empregada é a pesquisa qualitativa que denominamos "pesquisa-participante" ou "observação-participante".Os formulários desenvolvidos para esta proposta sãoo resultado das aplicações da atividade em alunos de licenciatura em matemática, alunos de graduação de outros cursos e professores de matemática.Utilizamos a Metodologia de ensino de Resolução de Problemas, desenvolvida por Polya em 1945, reforçando a tendência mundial para um novo "fazer matemática" que envolve modelagem, conjectura, experimentações, escrita expositiva e o estímulo ao pensamento independente e investigativo do aluno.Além disto, estudos mostram que esta eficiente metodologia tem sido pouco explorada ou utilizada de forma equivocada nas instituições brasileiras.Os resultados obtidos com este trabalho mostram que podemos fomentar a presença da Matemática Discreta no Ensino Médio, através de atividades e metodologias alternativas, que colocam o aluno como parte da construção do conhecimento, tornando-o, assim, mais participativo em sala de aula e favorecendo a desmistificação da matemática para os estudantes.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Teoria de Grafos. Ensino Médio.

Abstract

GraphTheory is a branch of Discrete Mathematics still little explored in Basic Education. The aim of this work is to show the feasibility of the teaching of this discipline in High School through a proposal of activity involving daily elements with contents on Hamiltonian Paths and Eulerian Tours. We applied the qualitative research methodology which is called "participant research" or "participant observation". The forms developed for this proposal are the result of the applications of the activity in undergraduate students in mathematics, undergraduate students of other courses and teachers of mathematics. We used the so called Problem Solving teaching methodology, developed by Polya in 1945, reinforcing the worldwide trend towards a new "doing maths" that involves modeling, conjecture, experimentation, expository writing and stimulating the student's independent and investigative thinking. In addition, studies show that this efficient methodology has been little explored or misused in Brazilian institutions. The results obtained with this work show that we can foster the presence of Discrete Mathematics in High School through alternative activities and methodologies that place the student as part of the construction of knowledge, thus making it more participatory in the classroom and favoring the demystification of mathematics for students.

Keywords: Problem Solving. Graph Theory.High School.

*O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, CNPq e FAPERJ.

[1] Fundação de Apoio à Escola Técnica do Rio de Janeiro, Escola Técnica Estadual Adolpho Bloch
[2] Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática e Estatística
[3] Universidade Federal Fluminense, Licenciatura em Matemática

Introdução

A Teoria de Grafos é uma área da Matemática Discreta que estuda objetos matemáticos denominados grafos, utilizados na modelagem de problemas em vários campos das ciências tais como computação, engenharia, biologia, química, etc. Esta ferramenta é empregada em empresas de prestação de serviços, em representações de redes de distribuição de produtos, redes de comunicação e transporte. Além de seu grande potencial de aplicabilidade, também é vasto o número de pesquisas com resultados teóricos em matemática.

Em seu artigo *Tendências em Matemática: como elas podem mudar a educação*, Lovász (2013) elenca quatro vertentes que vêm impactando o "fazer matemática" nestes últimos anos. Primeiramente, o tamanho da comunidade e da pesquisa matemática cuja atividade aumentou exponencialmente; em segundo, as novas áreas de aplicação tais como computação, economia, e quase todas as áreas da atividade humana que fazem cada vez mais uso da matemática; em terceiro, as novas ferramentas: computadores e tecnologia da informação; e finalmente, o surgimento de novas formas de atividade matemática: algoritmos e programação, modelagem, conjectura e demonstração. Assim, a Matemática Discreta que permeia essas aplicações ganha uma importância considerável na modelagem dessas tendências. No entanto, apesar do seu uso prático e atual, o ensino desta disciplina no Ensino Médio no Brasil se restringe a problemas de contagem (BRASIL, 2002), e tal conteúdo não está presente no Currículo deste segmento.

Outro fator comum enfrentado pelas escolas brasileiras é a evasão escolar e a rejeição pela matemática. Segundo a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (PNAD, 2017), apenas 46,1% dos brasileiros com 25 anos ou mais concluiu o Ensino Médio. Os dados tornam-se ainda mais preocupantes quando observamos que 20,1% dos brasileiros de 15 a 29 anos com nível de instrução até o Ensino Superior Incompleto, não frequentam a escola ou alguma instituição para qualificação profissionalalegando falta de interesse.

O desafeto pela matemática é muito comum, fato observado diariamente em nossas escolas. Isso tem levado professores e pesquisadores a desenvolverem trabalhos explorando novas metodologias de forma a atrair a atenção dos alunos e fazer com que os conteúdos possam ser melhor assimilados. Como exemplo podemos citar Gil, Veiga e Rodrigues (2015), que sugerem o uso da tecnologia através do *software* "Boatemática Racional". Neste trabalho, os pesquisadores acreditam " [...]em uma nova forma de ensino de matemática, a qual urge ser praticada, tornando-se significativa e relevante para o aprendizado da disciplina" (GIL; VEIGA; RODRIGUES, 2015, p. 86).

Tenório, A., Aguiar, D. e Tenório, T.(2017) também apresentam uma abordagem alternativa de ensino-aprendizagem no Ensino Básico. Comparam o uso de construções manuais e do *software Poly Pro* no fortalecimento de conceitos de poliedros. Os resultados obtidos em ambas abordagens também foram satisfatórios. Assimcomo em Gil, Veiga e Rodrigues (2015), citados anteriormente, os trabalhos mostram como os alunos se interessaram mais pelas aulas com métodos alternativos do queaquelas tradicionais.

Portanto, para atrair mais a atenção dos alunos, a popularização da matemática se faz necessária. O Biênio da Matemática 2017−2018 no Brasil implementou inúmeras ações e eventos com atividades de ensino e pesquisa mais prazerosas a todo público, objetivando a desmistificação desta disciplina. Uma dessas ações, foi o 3° Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática, evento oficial do Biênio, em que o trabalho *Uma abordagem de Teoria de Grafos no Ensino Médio* foi apresentado (DANTAS; DE ALCANTARA; GONÇALVES, 2017).

Neste simpósio verificou-se que os próprios professores desconhecem os conteúdos da Matemática Discreta, o que sinaliza a necessidade de melhoria na formação dos professores de matemática. O ensino da Teoria de Grafos no Ensino Médio foi questionado, dado a sua não obrigatoriedade nos currículos nacionais. No entanto,várias situações da vida cotidiana poderiam ter o seu entendimento facilitado se as pessoas soubessem utilizar a ferramenta dos grafos. Os profissionais concordam com esta observação e apontam que a maneira lúdica proposta pelo trabalho é um ponto relevante e necessário para a apresentação destesnovos conteúdos.

Com o objetivo de mostrar a viabilidade e a importância do estudo da Teoria de Grafos no Ensino Médio, recorremos à técnica de ensino de Resolução de Problemas proposta por Polya (1945). Esta metodologia foi escolhida por promover a autonomia do aluno, tornando-o participante ativo no processo de construção do conhecimento. O método está dividido em quatro etapas: compreensão do problema, construção de uma estratégia, execução da estratégia e revisão da solução.

A metodologia de pesquisa aplicada é a “pesquisa-participante” ou “observação-participante”. Esta metodologia qualitativa de campo pressupõe que o pesquisador não é um “mero espectador” das atividades e das práticas humanas, mas um ativo produtor de tais atividades e práticas. A pesquisa participante é classificada por DEMO (1995) como uma “metodologia alternativa”, sedimentada em uma avaliação qualitativa das manifestações sociais, comprometida com intervenções que contemplam o autodiagnóstico (conhecimento, acumulação e sistematização dos dados); a construção de estratégia de enfrentamento prático dos problemas detectados e a organização política da comunidade como meio e fim (GORI, 2006).

> A pesquisa participantereconhece as implicações políticas e ideológicas subjacentes a qualquer prática social, seja ela de pesquisa ou de finalidades educativas, e propugna pela mobilização de grupos e organizações para a transformação da realidade social ou para o desenvolvimento de ações que redundem em benefício coletivo (GAJARDO, 1985, p. 40).

Dentro desse contexto, nossa proposta trabalha simultaneamente a matemática acadêmica com seu amplo campo de pesquisa e a matemática utilizada implicitamente em diversas áreas do cotidiano desses alunos.Este processo é desenvolvidode maneira simples e dinâmica, sem exigir conhecimentos prévios e de forma a auxiliar o aluno a "Adquirir uma compreensão do mundo do qual a Matemática é parte integrante, através dos problemas que ela consegue resolver e dos fenômenos que podem ser descritos por meio de seus modelos e representações" (BRASIL, 2002, p. 117).

O trabalho consiste em desafios que introduzem o conceito de passeio em grafos, especificamente caminhos *Hamiltonianos* e passeios *Eulerianos*. Os formulários desenvolvidos para esta proposta são o produto finaldos testes realizados com alunos de licenciatura em matemática, alunos de graduação de outros cursos e professores de matemática de diversos níveis. Finalmente, a intervenção foi realizada em uma turma de Ensino Médio da Escola Técnica Estadual Adolpho Bloch, da rede FAETEC no Rio de Janeiro.Os resultados apontam no sentido de que é possível fomentar a presença da Matemática Discreta para alunos deste nível de escolaridade.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: inicialmente descrevemosos pressupostos teóricos da metodologia de resolução de problemas e suas contribuições no ensino-aprendizagem, bem comoas definições da Teoria de Grafosutilizadas no trabalho. Em seguida, descrevemos a atividade e as considerações resultantes dos pré-testes. Finalmente, apresentamosa análise da aplicação, do desempenho dos alunos e as considerações finais.

Pressupostos teóricos e definições

A Teoria de Grafos surge no século XVIII, quando o matemático suíço Leonhard Euler solucionou, sistematicamente, o Problema das Pontes de Königsberg, conhecido popularmente como um enigma (SZWARCFITER, 2018). A partir de então,esta teoria começa a ser mundialmente pesquisada, incluindo a modelagem de diversas aplicações.

Embora a Teoria de Grafos não esteja presente no currículo, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) a abordam como um tema complementar, destacando sua importância ao falar do Problema das Pontes de Königsberg:

> Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema, via estrutura de grafo - no exemplo, um diagrama em que cada ilha é representada por um ponto e cada ponte é um segmento conectando dois pontos; explorar o problema, identificando situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta da condição geral de existência de uma tal solução (ainda no exemplo, o caso em que cada ilha tem um número par de pontes) (BRASIL, 2006, p. 94).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) apontam duas correntes de processos de ensino e aprendizagem. Segundo o documento, a primeira trata a aprendizagem como recepção de conteúdos e o ensino como transmissão de conhecimento pelo professor.

> Nessa concepção, a aprendizagem é vista como um acúmulo de conhecimentos, e o ensino baseia-se essencialmente na "verbalização" do conhecimento por parte do professor. Se por um lado essa concepção teórica apresenta a vantagem de se atingir um grande número de alunos ao mesmo tempo, visto que a atividade estaria a cargo do professor, por outro lado demanda alunos bastante motivados e atentos à palavra do professor, o que não parece ser o caso para grande parte de nossos alunos que estão imersos em uma sociedade que oferece uma gama de outras motivações (BRASIL, 2006, p. 80).

A segunda corrente, considera que a aprendizagem acontece quando o aluno, através da resolução de problemas, é levado a construir os conceitos. Assim, "[...] transfere para o aluno, em grande parte, a responsabilidade pela sua própria aprendizagem, na medida que o coloca como ator principal nesse processo" (BRASIL, 2006, p. 81).

De acordo com o documento supracitado, na primeira concepção, historicamente mais utilizada nas escolas brasileiras, os conteúdos são apresentados diretamente, originando o padrão de ensino em que a definição é apresentada, seguida de exemplos e exercícios. A segunda inverte a ordem: "[...]a aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se-ia pela apresentação de uma situação problema ao aluno, ficando a formalização do conceito como a última etapa do processo de aprendizagem" (BRASIL, 2006, p.81). Neste contexto, o professor passa a ser mediador do conhecimento.

Onuchic e Allevato (2011) dizem que a Metodologia de Resolução de Problemas favorece o desenvolvimento do pensamento matemático e permite que o aluno compreenda melhor os conteúdos e conceitos apresentados. De acordo com as autoras, os problemas devem ser propostos aos alunos antes que a formalização dos conceitos necessários tenha sido apresentada, pois um problema "[...]é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81).

De acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, "A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios"(BRASIL, 2002, p. 112). Esta metodologia também traz vantagens para o professor, pois "fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática"(ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82).Apesar de diversas vantagens da Resolução de Problemas, alguns professores não a utilizam em sala de aula ou o fazem de forma equivocada (JUSTULIN, 2017). Além disso, alguns livros didáticos a exploram de maneira errônea ou insuficiente (KLIEMANN; DULLIUS, 2017).

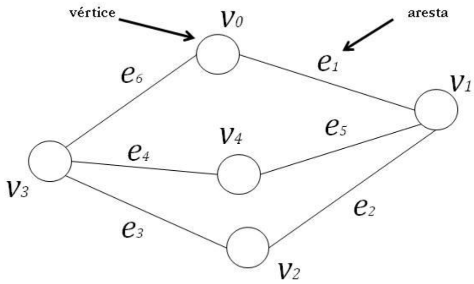
Para a aplicação da atividade adotamos o método de resolução de problemas de Polya (1945), que propõe quatro etapas para resolução de problemas matemáticos: (1) compreensão do problema - nesta fase o aluno deve entender o problema (perguntas podem ser feitas pelo professor de forma a auxiliá-los neste processo, a saber, qual é a incógnita? quais são os dados?); (2) estabelecimento de um plano - o aluno deve estabelecer conexões entre os dados e a incógnita, buscando problemas semelhantes que auxiliem na elaboração de um plano de resolução; (3) execução do plano - o aluno executa o plano elaborado; (4) - retrospecto: nesta etapa o aluno examina a resposta obtida e verifica se cada passo foi feito corretamente (neste momento o professor pode estimular o aluno a solucionar o problema de uma forma diferente e deve discutir se é possível utilizar o método em outro problema).

O professor deve salientar que problemas do cotidiano não são apresentados de maneira teórica, já modelados. Polya (1995) observa que:

> Os alunos devem, porém, aprender bem cedo que os problemas "literais" apresentam uma grande vantagem sobre os problemas puramente "numéricos": se o problema for literal ele se prestará a diversas verificações, as quais não podem ser aplicadas a um problema numérico (POLYA,1995, p. 11).

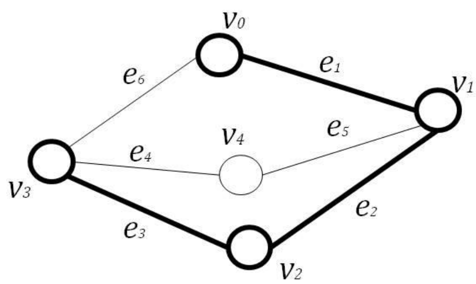
Para o entendimento da teoria empregada implicitamente na atividade, definimos a seguir,os conceitos de Teoria de Grafos. Um *grafo*G= (V,E) é um conjunto finito não vazio V e um conjunto E de pares não-ordenados deelementos distintos de V. Os elementos de V são chamados *vértices*do grafo e os elementos e=(v,w)de E (v, w em V), são as *arestas* de G. A representação gráfica de um grafo é obtida associando-se a cada vértice, pontos distintos do plano em posições arbitrárias, enquanto que a cada aresta (v,w) é associada uma linha arbitrária unindo os pontos correspondentes a v,w (SZWARCFITER, 2018). Veja o exemplo de um grafo na Figura 1, onde o conjunto $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e o conjunto $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

Figura 1–Exemplo de um grafo.



Fonte: arquivo dasPesquisadoras.

Figura 2–Exemplo de passeio P_1.



Fonte: arquivo das Pesquisadoras.

O *grau* de um vértice v em um grafo G é o número de arestas de Gincidentes a v.Um *passeio*P no grafo G é uma sequência não nula, finita P $=v_0e_1v_1e_2v_2...e_kv_k$ cujos termos sãovértices e arestas, alternadamente. Veja na Figura 2 um exemplo de passeio $P_1=v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3$.

Se os vértices do passeio P são distintos, P é chamado de *caminho*.Um grafo é *conexo* se existir um caminho entre qualquer par de vértices do grafo. Um caminho é dito *Hamiltoniano* quando contém todos os vértices do grafo.Se as arestas do passeio P são distintas, P é chamado de passeio *Euleriano*. No exemplo da Figura 2, o passeio $P_2 = v_4e_4v_3e_6v_0e_1v_1e_2v_2$é um caminho Hamiltoniano e o passeio $P_3 = v_3e_6v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3e_4v_4e_5$ é um passeio Euleriano.

A seção a seguir é dedicada à descrição das etapas do desenvolvimento do trabalho.

Aplicação da atividade: metodologia e considerações

Os formulários foram desenvolvidos após sucessivas aplicações em indivíduos classificados em três categorias: (1) alunos de graduação, (2) professores e (3) alunos de Ensino Médio.

O primeiro grupo foi composto por alunos de graduação de Licenciatura em Matemática e de Ciência da Computação, ambos da Universidade Federal Fluminense. O segundo grupo foi formado por professores de diversos níveis: professores de Educação Básica do 3º Simpósio Nacional de Formação do Professor de Matemática (ANPMat - Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica, IMPA e SBM); e professores do Ensino Superior. A terceira categoria, que constitui o grupo alvo do experimento, foi formada por alunos do Ensino Médio da Escola Técnica Estadual Adolpho Bloch, da rede FAETEC (5º Workshop de Matemática Discreta e Aplicações).

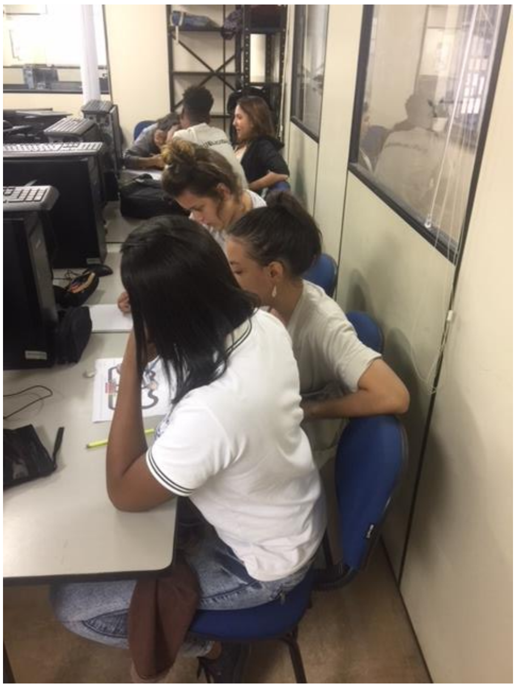
Os formulários foram alterados após cada intervenção nos diferentes grupos. Destacamos que as principais modificações realizadas foram: retirada de palavras ou expressões ambíguas que dificultavam o entendimento; exclusão de perguntas que induziam a um determinado raciocínio para a solução do problema (a ideia da atividade é a promoçãoda autonomia e do desenvolvimento do pensamento independente).

Como já mencionado anteriormente, Onuchic eAllevato(2011) afirmam que os conteúdos que serão trabalhados na atividade não devem ter sido apresentados anteriormente aos alunos. No pré-teste com os alunos de Ciência da Computação notamos que alguns deles já possuíam noções iniciais de conceitos mobilizados nos desafios. Apesar disso, não conseguiram associar os conhecimentos já adquiridos para resolução dos problemas propostos.

Assim, a propostafinal consiste em dois desafios que utilizam os conceitos de caminho Hamiltoniano e passeio Euleriano em grafos. A atividadefoi dividida em 3 etapas: desafios, soluções e formalização, e pós-teste.A escola selecionada para a intervenção e coleta de informações pertence a rede pública de ensino: Escola Técnica Estadual Adolfo Bloch (rede FAETEC - Fundação de Apoio a Escola Técnica do Estado do Rio de Janeiro). Ainstituição está inserida em um bairro do subúrbio do Rio de Janeiro, com alunos das classessociaisC e D.

A aplicação ocorreu em uma turma regular do segundo ano do Ensino Médio Integrado de Publicidade e teve duração total de 80 minutos.Os materiais utilizados foram:projetor, cópias impressas da atividade e folhas de rascunho.A turma foi dividida em quatro grupos de 3 alunos que estão identificados por números. Veja na Figura 3 uma fotografia da atividade realizada na escola.

Figura 3 –Fotografia da aplicação da atividade na escola.



Fonte: dados da Pesquisa.

A primeira etapa, com duração de 40 minutos, é o momento em que os alunos tentam fazer os desafios, discutindo as respostas e levantando conjeturas. Ambos estão relacionados a história de Bruno, que produz e entrega de doces no seu bairro, no qual um esquema das lojas de entrega está representado no mapa da Figura 4.

Inicialmente, cada grupo recebeu uma folha A4 com o primeiro desafio, o mapa da Figura 4 impresso e uma folha A4 de rascunho.

O primeiro desafio desenvolve o conceito de Caminho Hamiltoniano em grafos e consiste em: "Para não perder tempo e conseguir realizar todas as entregas no mesmo dia, Bruno não quer passar duas vezes na mesma loja. É possível achar um trajeto de tal forma que ele passe por cada estabelecimento do mapa uma única vez? Se sim, qual seria o trajeto?"

Figura 4–Mapa apresentado na Atividade.

Fonte: arquivo das Pesquisadoras.

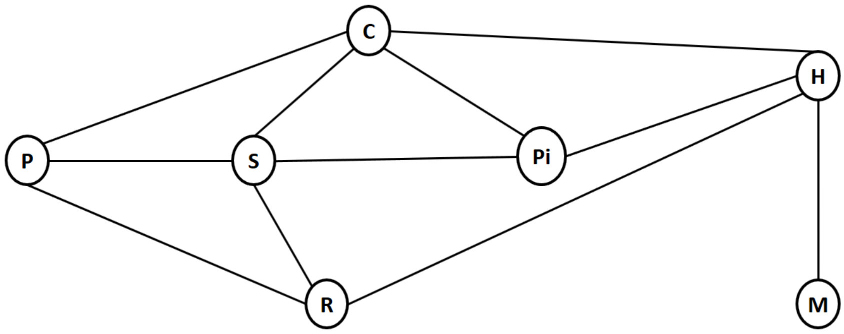
Após 20 minutos, o primeiro desafio e a folha de rascunho foram recolhidos e o segundo desafio e folha de rascunho foram entregues.

No segundo desafio, com duração de 20 minutos, substituímos o mapa pelo grafoque o modela, como ilustrado na Figura 5. O objetivo desta troca consiste em fazer com que o aluno tenha maior familiaridade com um grafo para resolver o problema, sem que ele saiba se tratar do mesmo. A atividade é a seguinte: "Depois das entregas, Bruno percebeu que a produção de doces foi maior do que o encomendado. Para compensar este erro, ele decidiu passar por todas as ruas do bairro oferecendo os doces para quem quisesse comprar a varejo no dia seguinte. Com uma caneta e um papel fez rapidamente um desenho simplificado do mapa para conseguir pensar melhor. É possível encontrar um trajeto que passe uma única vez em cada rua? ".Neste desafio, o aluno é levado a refletir sobre o conceito de passeio Euleriano em grafos.

Vale ressaltar que nesta etapa não mencionamos aos alunos as definições e conceitos mobilizados, como proposto por Polya (1995). O objetivo, neste momento, é que o aluno entenda os processos sem conceituá-los.

Este desafio não tem solução, mas chegar a essa conclusão não é tão imediato. Esperamos que os alunos fiquem ainda mais motivados a investigar e levantar conjecturas a respeito dos passeios Eulerianos, para que, na próxima etapa, possamos discutir sobre tal impossibilidade.

Figura 5– Grafo que modela o mapa da atividade.



Fonte: arquivo das Pesquisadoras.

Os formulários foram recolhidos e na segunda etapa, soluções e formalização, discutimos sobre as respostas e ideias dos alunos. Com o auxílio do projetor, inicialmente mostramos as possíveis soluções do primeiro desafio e discutimos sobre a resposta negativa do segundo desafio. Em seguida, apresentamos as definições da Teoria de Grafos, de forma a relacionar estas soluções com a teoria. É nesta etapa que a palavra grafo é usada pela primeira vez.

Ao término das definições mostramos a proposição que justifica a impossibilidade do segundo desafio:

Proposição 1 (BONDY; MURTY, 1979, p.52): *Um grafo conexo tem passeio Euleriano se e só se tem no máximo dois vértices de grau ímpar*.

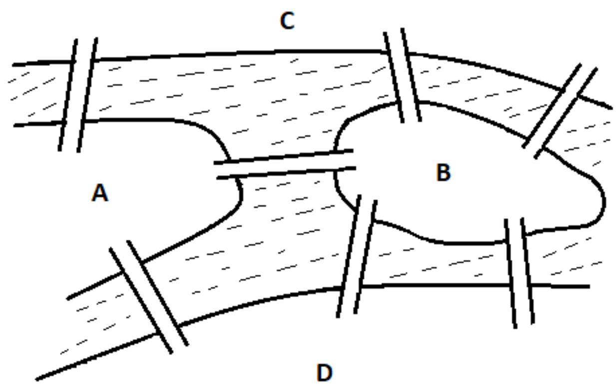
Como a atividade está sendo aplicada no Ensino Médio, não escrevemos a demonstração, apenas apresentamos uma ideia de prova que consiste em analisar a paridade do número de vezes que o passeio visita o vértice. Esta etapa teve duração de 25 minutos.

A terceira e última etapa da aplicação (pós-teste) foi realizada individualmente e teve duração de 15 minutos.O pós-teste é constituído por duas questões elaboradas com o objetivo de avaliar a capacidade do aluno de modelar um problema através de um grafo e identificar passeios em grafos relacionando-os com os novos conceitos da teoria aprendida.

A primeira questão do teste aborda o problema das pontes de Königsberg:

“A Figura 6 representa a cidade de Königsberg no século XVIII, suas 4 ilhas e as pontes que as conectavam. ”

Figura 6–Ilustração das pontes de Königsberg.

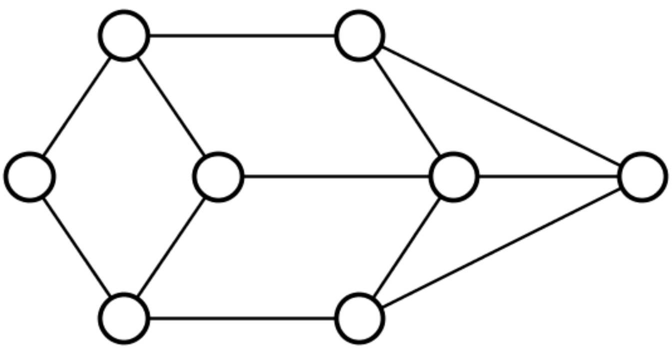


Fonte: arquivo das Pesquisadoras.

"É possível passar por todas as 7 pontes somente uma vez em cada uma delas? Faça um grafo que modele a cidade e explique como chegou na sua resposta". Com esta questão, pretendemos verificar se os alunos são capazes de modelar o problema em grafos e identificar a impossibilidade de um passeio Euleriano no mesmo. Assim como no desafio 2, não há um passeio Euleriano nesse grafo pois há mais de dois vértices com o grau ímpar no grafo que modela a questão (resultado da proposição apresentada).

A segunda questão do testeé sobre caminhos Hamiltonianos (veja Figura 7): "Exiba, no grafo abaixo, um caminho hamiltoniano que comece e termine no mesmo vértice. "

Figura 7– Grafo da segunda questão.



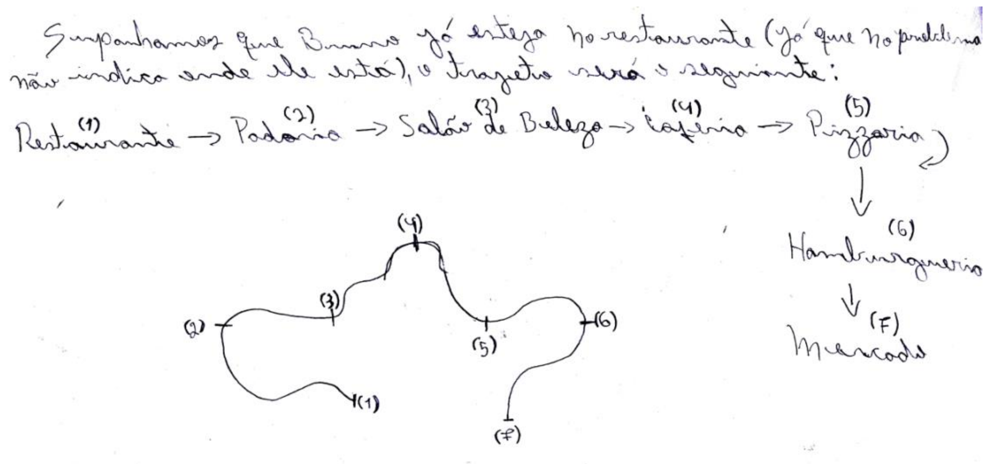
Fonte: arquivo das Pesquisadoras.

Análise da aplicação

A realização das atividades em grupos permite que o professor tenha maior interação com os alunos e acompanhe o desenvolvimento do raciocínio. As resoluções, comentários e resultados dos desafios e do pós-teste são destacados nesta seção.

Na etapa dos desafios, todos os alunos entenderam o problema proposto. No primeiro desafio, os grupos 1, 2 e 3 apresentaram múltiplas soluções. Observamos que esses grupos não modelaram matematicamente o problema, mas descreveram as soluções com suas próprias palavras. Apenas os grupos 3 e 4 apresentaram uma abstração para a solução (conforme a Figura 8).

Figura 8 – Resposta do Grupo 4 para o primeiro desafio.



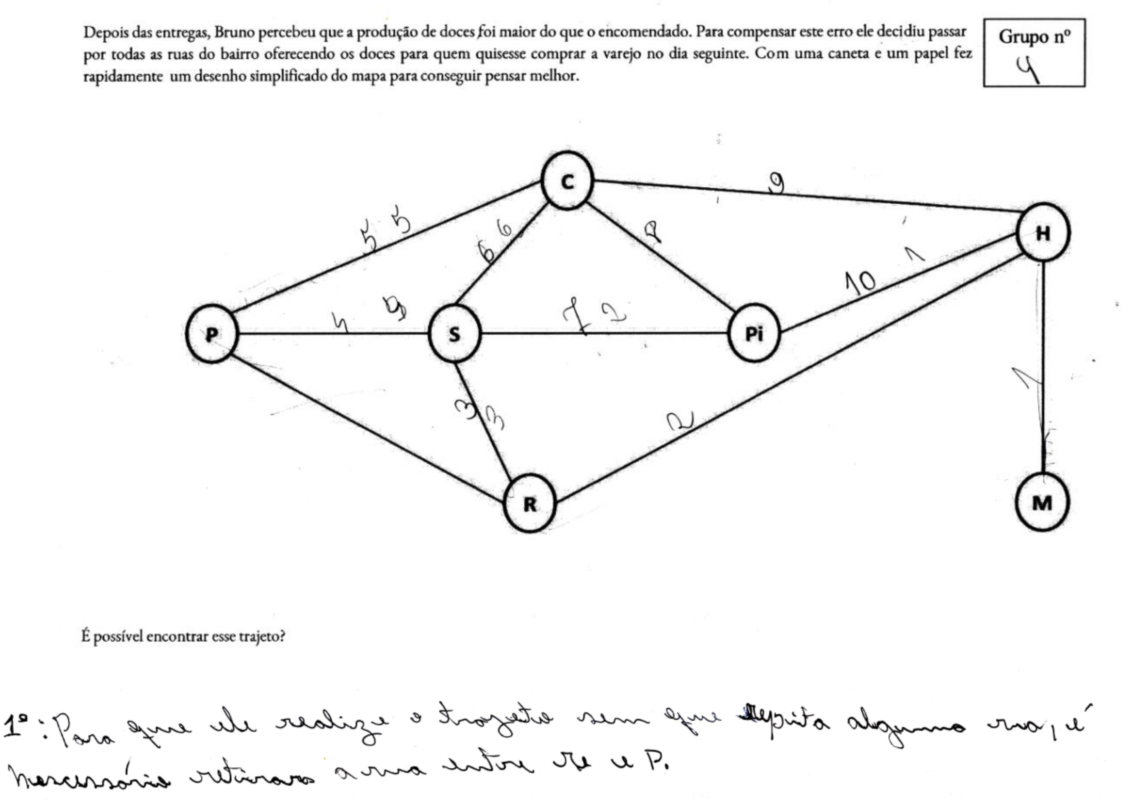
Fonte: dados da pesquisa.

Uma das dificuldades encontradas foi o ponto de partida de Bruno. Muitos alunos perguntaram “onde está Bruno?”no formulário do grupo pré-teste, o ponto de partida foi fixado, mas, como esta proposta limitaria as possibilidades de solução, preferimos retirar a restrição. Portanto, o ideal seria acrescentar à pergunta o fato de que Bruno tem facilidade para chegar ao bairro e pode começar as entregas de qualquer ponto do mapa.

O Segundo desafio consiste em descobrir se existe um passeio Euleriano no grafo que modela o problema inicial. Entretanto, relembramos que não há um passeio Euleriano para esse grafo. Verificamos, inicialmente, que a maioria dos alunos pensou que o problema fosse igual ao proposto anteriormente, ou seja, que não seria possível repetir os estabelecimentos. Os Grupos 3 e 4 entenderam o desafio. Já nos Grupos 1 e 2, foi necessária a orientação na interpretação do problema. À medida que os alunos foram chegando à conclusão de que o problema era impossível,perguntávamos o que poderia ser feito para torná-lo possível. Os Grupos 2 e 3 apontaram que “o problema estava com os triângulos” e apenas o Grupo 4 retirou uma rua e exibiu uma solução, conforme ilustra a Figura 9. Uma questão interessante levantada por um aluno do

Grupo 2, foi expressa na pergunta: "vocês não dariam algo que fosse impossível, dariam? "e também no desabafo de um aluno "isso é matemática, eu não vou fazer não, faz você". Essas declarações exemplificama importância da introdução de situações de pesquisa para os alunos da Educação Básica de forma aeliminar o preconceito e o "medo" que eles têmda matemática.

Figura 9 – Resposta do Grupo 4 para o segundo desafio.

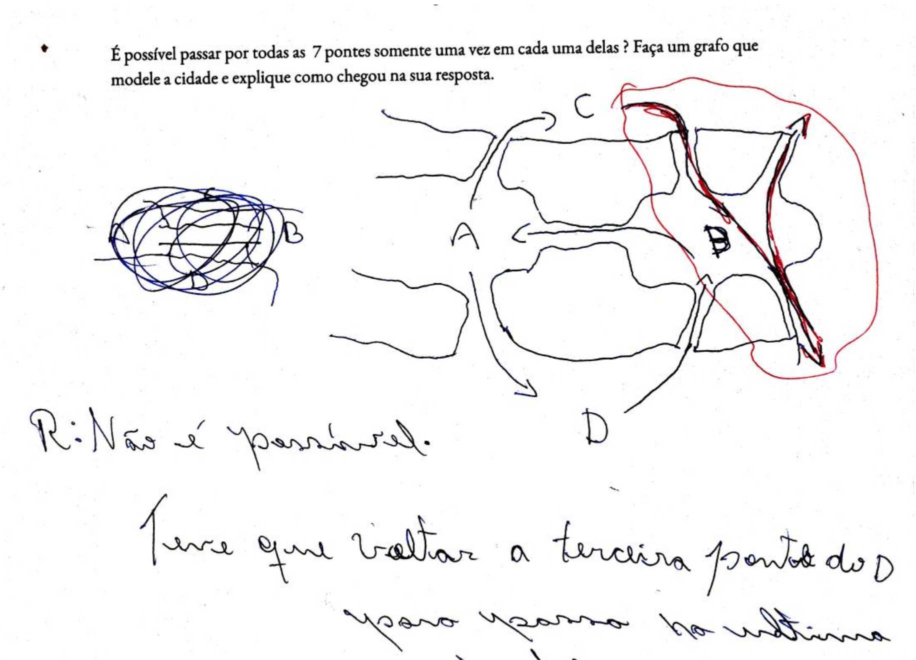


Fonte: dados da pesquisa.

Na etapa soluções e formalização foram introduzidos os conceitos de Teoria de Grafos e apresentadas as mesmas situações anteriores sob essa nova ótica. Os alunos ficaram muito empolgados porque puderam discutir as suas próprias soluções, além de responderem às perguntas sobre os conceitos apresentados, tais como grau de vértice, passeio Euleriano e caminho Hamiltoniano. Através de exemplos, os alunos assimilaram e aprenderam a visualizar a aplicação da Proposição 1 nos grafos apresentados.

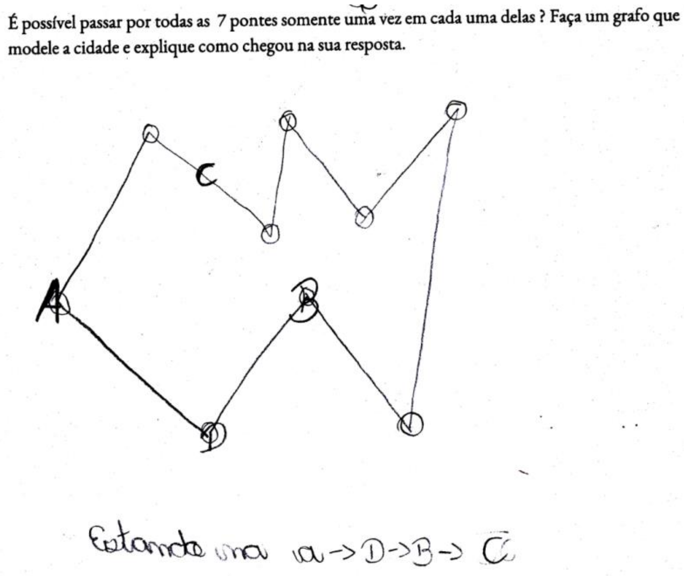
No pós-teste, cada aluno trabalhou emduas questões: uma sobre as pontes de Königsberg e outra sobre caminho Hamiltoniano. Apenas três alunos verificaram a impossibilidade do problema das pontes de Königsberg. Destes três, dois alunos fizeram a modelagem do grafo corretamente e um desenhou o mapa novamente, conforme ilustra a Figura 10. Neste momento, sentimos a necessidade de reforçar o que é a modelagem em grafos e como representar um problema real por vértices e arestas. Oito alunos disseram ser possível apresentar uma solução. Desses oito, sete não modelaram o grafo corretamente, o que mostra que o problema dos alunos não foi o entendimento da Teoria de Grafos, mas da modelagem do problema. Por exemplo, esses alunos tiveram dificuldade de modelar os vértices C e D, conforme ilustram as Figuras 11 e 12. Quando o aluno é confrontado com novos conceitos ou novos problemas depois de conjecturar, surge a formulação que é o ponto inicial para a generalização (MASON, BURTON, STACEY, 2010). Segundo Stacey (2006), a generalização é um método para cobrir a distância entre conhecimento prévio e novos conceitos, já que a generalização pode fazer a conexão entre conhecimento prévio para alcançar novos conceitos relacionados.Nesse sentido é de extrema importância a introdução de atividades como a que estamos propondo, que permitam a generalização do problema, onde o aluno consegue por abstração construir no plano pontos que representam locais e linhas que representam pontes.

Figura 10 – Resposta do Pós-teste de um aluno do Grupo 4.



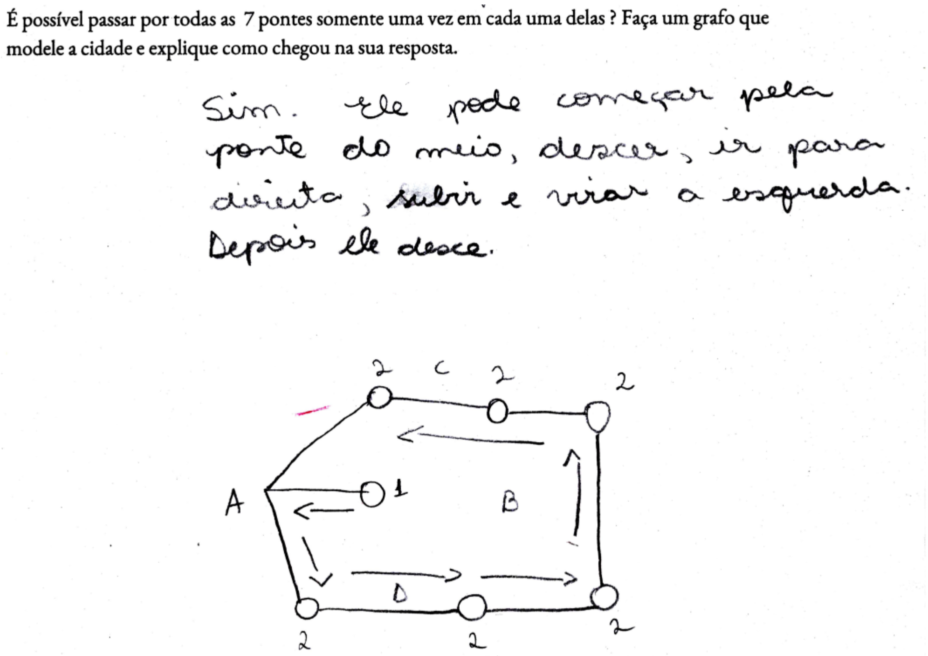
Fonte: dados da pesquisa.

Figura 11 – Resposta do Pós-teste de uma aluna do Grupo 2.



Fonte: dados da pesquisa.

Figura 12 – Resposta do Pós-teste de um aluno do Grupo 1.



Fonte: dados da pesquisa.

Considerações finais

A utilização de metodologias alternativas no ensino de conceitos em matemática pode aumentar o interesse do aluno pela disciplina. Nesta pesquisa apresentamos o resultado da aplicação de uma atividade lúdica para ensinar conceitos de Matemática Discreta, em particular, daTeoria de grafos a alunos da área de humanas do segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública no Rio de Janeiro.

O principal resultado desta intervenção confirma que é possível introduzir a Teoria de Grafos no Ensino Médio, econscientizar os alunosde que eles podem resolver problemas relacionados ao seu dia adia, como o problema de Bruno, utilizando este conhecimento. Os conceitos de passeio Euleriano e caminho Hamiltoniano foram explorados utilizando a metodologia de resolução de problemas. Essa metodologia permite que aluno se envolva mais no processo de aprendizagem, contribuindo para trazer maior autonomia ao aluno.

Com relação aos elementos de matemática e da cultura científica, verificamos que este experimento possibilitou ao aluno:praticar a investigação, observar e questionar; experimentar diversas soluções, formular uma hipótese e testá-la, argumentar. Com relação às competências sociais, foi possível ao aluno participar do diálogo e discussão em grupo, escutar a opinião dos colegas, formular e justificar um ponto de vista. Neste sentido, atividades semelhantes proporcionam o desenvolvimento da autonomia na solução de problemas em matemática e a perseverança em atividades de pesquisa.

Para o professor, essas intervenções representam uma oportunidade de não utilizar o método tradicional de ensino e deatrair a atenção e o interesse dos alunos. A inclusão do lúdico em sua metodologia de ensino promove a aprendizagem de conteúdos de matemática de forma mais prazerosa.

Referências

BONDY, A. J.; MURTY, U. S. R. **Graph Theory with Applications**.Elsevier Science Publishing, 1979.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**.** Brasília: MEC/SEB, 2002.

______ Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares Para o Ensino Médio.** Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**.** Brasília: MEC/SEB, 2006.

DANTAS, S. S.; DE ALCANTARA, C. F. B.; GONÇALVES, I. F. de A. Uma abordagem da Teoria de Grafos no Ensino Médio. In: **3º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática**, 2017, Rio de Janeiro. Pôster, Rio de Janeiro, 2017.

DEMO, Pedro. **Metodologia científica em Ciências Sociais**. São Paulo: Atlas, 1995.

GIL, J. S.; VEIGA, J.; RODRIGUES, C. K. Desenvolvimento do *software* "Boatemática Racional". **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, Rio de Janeiro, v. 5, n. 2, p. 85-96, mai/ago.2015.

Disponível em: <http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/-view/2834>. Acesso em: 31 mai. 2018.

GAJARDO, M. Pesquisa participante: propostas e projetos. In: BRANDÃO, CarlosRodrigues (Org.). Repensando a pesquisa participante. São Paulo: Brasiliense, 1985. p. 15-50.

GORI, R. M. A., Observação Participativa e Pesquisa-Ação: Aplicações na pesquisa e no contexto Educacional. **Revista Eletrônica de Educação do Curso de Pedagogia do Campus Avançado de Jataí da Universidade Federal de Goiás,** Vol 1 - n.2 ,jan/jul 2006.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). **PNAD** Contínua Educação 2017. Disponível em <https://biblioteca.ibge.gov.br/index.php/biblioteca-catalogo?view=detalhes&id=2101576>. Acesso em 31 mai. 2018.

JUSTULIN, A. M. Então…Eu não uso a metodologia de Resolução de Problemas? **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, Rio de janeiro, v. 7, n. 1, p. 69-83, jan/abr. 2017. Disponível em: <http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/3950>. Acesso em: 21 abr. 2018.

KLIEMANN, G. L.; DULLIUS, M. M. Percepção dos Docentes Quanto à Abordagem da Resolução de Problemas nos Livros Didáticos de Matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, cidade, v. 10, n. 3, p. 177-185, 2017. Disponível em: <http://www.pgsskroton.com.br/seer/index.php/jieem/article/view/4632>. Acessoem: 10 mai. 2018.

LÁSZLÓ, L. Trends in Mathematics: How They Could Change Education. In: ICCM, 19, 2013, Montreal, **Notices of the ICCM**: Montreal: 2013, p. 79-84. Disponívelem<https://www.intlpress.com/site/pub/files/_fulltext/journals/iccm/2013/0001/0002/ICCM2013-0001-0002-a009.pdf>. Acessoem: 9 jun 2018.

MASON, J., STACEY, K.., BURTON, L. **Thinking Mathematically (2th edition)**, Edinburgh: Pearson., 2010 *apud*Hashemia, N., Abua, M.S., Kashefia, H., Rahimib, K. **Generalization in the Learning of Mathematics**, 2nd International Seminar on Quality and Affordable Education, 2013.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**, Rio de janeiro, v. 24, n. 41, p. 73-98, dez. 2011. Disponível em: <http://www.redalyc.org/html/2912/291223514005/>. Acesso em: 5 mai. 2018.

POLYA, G. **How to solve it:** A new aspect of mathematical method. Princeton University Press, 1945.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Trad. e Adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

STACEY, K..What Is Mathematical Thinking and Why Is It Important? University of Melbourne, Australia, 2006 *apud*Hashemia, N., Abua, M.S., Kashefia, H., Rahimib, K. **Generalization in the Learning of Mathematics**, 2nd International Seminar on Quality and Affordable Education, 2013.

SZWARCFITER, J.**Teoria Computacional de Grafos: Os Algoritmos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2018.

TENÓRIO, A.; AGUIAR, D. V.; TENÓRIO, T. O uso de construções manuais e do *software Poly Pro* no estudo de poliedros. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, Rio de Janeiro, v. 7, n. 2, p. 141-160. Disponível em: <http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/-article/view/3858>. Acesso em: 31 mai. 2018.