RECM
REVISTA DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FUNÇÃO SENO E COSSENO: UMA ABORDAGEM DE ENSINO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

SINE AND COSSENE FUNCTION: A TEACHING APPROACH THROUGH TROUBLESHOOTING

Juliana Meneghelli[1]
Janaína Poffo Possamai[2]

Resumo

Esse estudo apresenta uma pesquisa que tem como objetivo avaliar implicações de uma abordagem de ensino orientada pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas na construção de leis de formação das funções seno e cosseno a partir de situações de natureza periódica (ondas de marés, duração do dia e temperatura do ar). Para tanto, inicialmente discute-se sobre o ensino da Trigonometria, bem como sobre a utilização desta metodologia em sala de aula, discutindo os procedimentos que norteiam sua aplicação. Em seguida, apresenta-se a análise de uma atividade, realizada com uma turma de segundo ano do Ensino Médio, na qual avalia-se as contribuições e as dificuldades de se modelar uma função trigonométrica que possa descrever determinada situação. Os resultados indicam que uma abordagem norteada por essa metodologia permite o desenvolvimento da autonomia e o protagonismo dos estudantes no processo de construção da aprendizagem, bem como implica em uma aula baseada na compreensão e significação da Matemática.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Compreensão em Matemática. Funções Trigonométricas.

Abstract

This study presents a research that aims to evaluate the implications of a teaching approach guided by the Methodology of Teaching-Learning-Assessment through Problem Solving in the construction of sine and cosine function formation from situations of a periodic nature (tides of waves, duration of day and air temperature). To do so, we initially discuss the teaching of Trigonometry, as well as the use of this methodology in the classroom, discussing the procedures that guide its application. Next, we present the analysis of an activity performed with a second-year high school class, in which the contributions and difficulties of modeling a trigonometric function that can describe a given situation are evaluated. The results indicate that an approach guided by this methodology allows the development of students' autonomy and protagonism in the process of learning construction, as well as implies a class based on the understanding and meaning of Mathematics.

Keywords: Problem Solving. Understanding in Mathematics. Trigonometric Functions.

1 Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática – PPGECIM da Universidade Regional de Blumenau - FURB
2 Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática - PPGECIM da Universidade Regional de Blumenau - FURB.

Introdução

A Trigonometria é estudada em dois momentos distintos na Educação Básica: nos Anos Finais do Ensino Fundamental, quando são estudadas as razões trigonométricas no triângulo retângulo; e no Ensino Médio, quando são abordados os conceitos trigonométricos com base na circunferência, bem como as funções trigonométricas.

No entanto, ao referir-se ao ensino da Trigonometria, verifica-se certa insegurança dos estudantes frente a aprendizagem destes conceitos. Santos e Cury (2011, p. 50) apontam que "nem sempre os alunos se sentem motivados para seu estudo, apresentando dificuldades na resolução de problemas que envolvem as relações e funções trigonométricas". Dantas (2013) corrobora com estes autores quando, em sua pesquisa, relata que o trabalho com estudantes de Ensino Médio mostra que muitos deles encontram dificuldades no entendimento dos conceitos relacionados a Trigonometria, sendo que a compreensão de algumas características relativas às funções ainda é um desafio.

Dantas (2013, p. 22) destaca que "[...] quando falamos sobre dificuldades enfrentadas pelos alunos no aprendizado de Matemática, a trigonometria surge como uma das principais fontes de reclamação por parte dos alunos, desde o ensino médio até a graduação". Nesse sentido, sabendo da relevância do estudo da Trigonometria – visto que é uma área com aplicações em diversas situações do mundo real, bem como em situações de natureza complexa, como na Ciência, na Medicina, na Física, na Eletricidade, na Música, na Arquitetura, na Informática, entre outras – têm-se a necessidade de buscar por caminhos/metodologias que possam vir a auxiliar os professores e estudantes no processo de ensino e aprendizagem destes conceitos.

Tendo em vista as dificuldades encontradas pelos estudantes na aprendizagem de conceitos relativos a Trigonometria abordada no Ensino Médio, bem como as atuais tendências da Educação Matemática como possibilidades para se fazer Matemática em sala de aula, percebe-se a necessidade da construção de propostas metodológicas fundamentadas nestas que promovam uma aprendizagem com compreensão destes conceitos. Desta forma, este estudo tem como objetivo avaliar as implicações de uma abordagem de ensino orientada pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas na construção de leis de formação das funções seno e cosseno a partir de situações de natureza periódica.

O ensino através da Resolução de Problemas: metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação

A Resolução de Problemas vem tornando-se uma importante metodologia para o processo ensino-aprendizagem-avaliação da Matemática. O uso desta em sala de aula mostra-se importante no desenvolvimento dos conceitos e ideias matemáticas, uma vez que permite uma abordagem diferenciada daquela estabelecida pelo método tradicional de ensino, quando propõe como ponto de partida o uso de problemas geradores de conhecimento, permitindo que os estudantes participem de todo o processo de construção dos conceitos matemáticos.

Onuchic (1999, p. 208) destaca que o interesse em trabalhar com o ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas "baseia-se na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreender os conceitos, os processos, e as técnicas operatórias dentro do trabalho feito em cada unidade temática". E com relação a compreensão dos conceitos matemáticos pelos estudantes, a autora ressalta que a ideia de entender é principalmente relacionar, dado que a compreensão aumenta quando:

> [...] o aluno é capaz de relacionar uma determinada idéia matemática a um grande número ou uma variedade de contextos; o aluno consegue relacionar um dado problema a um grande número de idéias matemáticas implícitas nele; o aluno consegue construir relações entre as várias idéias matemáticas contidas num problema (ONUCHIC, 1999, p. 208).

De acordo com Van de Walle (2009, p. 58), "Ensinar com tarefas baseadas em resolução de problemas é mais centrado no aluno do que no professor. O ensino começa e se constrói com as ideias que as crianças possuem [...] seus conhecimentos prévios". O autor ainda destaca que o processo de resolver problemas exige confiança nos estudantes, ou seja, deve-se acreditar que eles consigam criar ideias matemáticas que sejam significativas.

Pozo e Crespo (1998, p. 89) destacam que sempre que for necessário a assimilação do novo conceito com alguma informação que já é de conhecimento do estudante para que ocorra a compreensão, esta deve ser realizada, uma vez que se esses conhecimentos não forem ativados, ou então, não existirem, também não haverá um problema para o estudante.

Nas aulas de Matemática, a compreensão dos conceitos estudados deve ser o principal objetivo e esta concepção deve estar alicerçada na convicção de que a aprendizagem é significativa[3] para os estudantes quando os conceitos são construídos por eles e não quando são impostos pelo professor ou então pelo livro didático. Para Onuchic (1999, p. 208), "Quando os professores ensinam matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão".

Assim, a Resolução de Problemas como metodologia/estratégia de ensino deve começar pelo estudante, ou seja, deve começar considerando os conhecimentos prévios, aqueles já existentes

[3] Entende-se aqui a aprendizagem significativa como uma aprendizagem com sentido e compreensão. Para que a Matemática tenha sentido para o estudante é necessário que ele avance além do saber, de conhecer informações, é mais do que ser capaz de seguir um procedimento ou utilizar um algoritmo. Uma marca da compreensão matemática é a de que o estudante tenha a capacidade de justificar por que uma resposta é correta ou porque uma regra matemática faz sentido (VAN DE WALLE, 2009).

na estrutura cognitiva do indivíduo e não da forma tradicional de ensino, aquela que tem como ponto de partida a compreensão do professor sobre determinado conceito matemático. Desta forma, considera-se o ensino através da Resolução de Problemas como um dos caminhos para a promoção da aprendizagem significativa da Matemática, e segundo Van de Walle (2009, p. 58), "A aprendizagem é um resultado do processo de Resolução de Problemas".

Considerando a aprendizagem, bem como a compreensão de conceitos matemáticos como o resultado do processo de resolução de um problema, Vila e Callejo (2006, p. 25) destacam que:

> Os problemas são um meio para pôr o foco nos alunos, em seus processos de pensamento e nos métodos inquisitivos; uma ferramenta para formar sujeitos com capacidade autônoma de resolver problemas, críticos e reflexivos, capazes de se perguntar pelos fatos, suas interpretações e explicações, de ter seus próprios critérios, modificando-os, se for necessário, e de propor soluções.

Uma aula em que os estudantes estão construindo os conceitos matemáticos através da resolução de um problema é muito mais significativa do que quando o professor explica o conteúdo e solicita que eles façam exercícios para praticar e aplicar os conceitos estudados.

Ao se colocar como foco da atividade em sala de aula a Resolução de Problemas, Onuchic (1999) aponta algumas considerações: o ponto de partida é o problema e não a definição; um problema não é uma atividade para a aplicação de algoritmos; as aproximações construídas em relação ao novo conceito podem ser utilizadas para resolver novos problemas; o novo conceito é construído de forma que faça sentido em um ambiente de resolução de problemas; e ainda, a resolução de problemas deve ser utilizada como orientação para a aprendizagem, e não em paralelo a abordagem do conteúdo em sala de aula, ou somente como aplicação do conceito estudado.

Assim, Allevato e Onuchic (2009, p. 9) destacam que "o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado", sendo que a avaliação ocorre de forma contínua durante o processo de resolução. Pironel (2002) afirma que a Resolução de Problemas se constitui como um instrumento eficiente, válido e consistente de avaliação para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, sendo este também responsável pela construção de uma aprendizagem com significado e compreensível para o estudante.

Na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, Allevato e Onuchic (2014, p. 47) destacam que:

> A avaliação do crescimento dos alunos é feita, continuamente, durante a resolução do problema. [...] a avaliação se realiza integrada ao ensino e à aprendizagem, pois nessa metodologia o professor tem a oportunidade de perceber constantemente as condições e conhecimentos que os alunos possuem, ajudando-os durante o processo, bem como os próprios alunos se percebem e se

> ajudam, sendo eliminado o caráter sancionador das avaliações somativas (ditas tradicionais).

Na avaliação da resolução de um problema, os erros não devem ser considerados como insucesso do estudante no processo, pelo contrário, o professor enquanto mediador deve encorajá-los a buscar por novas alternativas que possam conduzi-los a um novo caminho para encontrarem uma solução. Conforme destaca Echeverría (1998, p. 65), "os erros não devem ser tratados como fracassos, mas como fonte de informação para o professor na sua tarefa de 'treinador' e para a auto avaliação do aluno".

O processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas exige do professor e dos estudantes, novas atitudes em sala de aula. De acordo com Onuchic e Allevato (2011), é papel do professor preparar ou então selecionar problemas que permitem a construção de novos conceitos. Nesse processo, o professor deixa de ser protagonista e passa a ser mediador da atividade, colocando os estudantes como os responsáveis pela própria aprendizagem.

Diversos autores (VAN DE WALLE, 2009; SILVA; SOUZA, 2016) enfatizam a importância de ensinar pela Resolução de Problemas, identificando que essa é uma tarefa que demanda preparo quando comparada com o método tradicional de se ensinar, no qual o professor ensina conceitos e algoritmos e em seguida sugere uma lista de atividades para a fixação desses. Para Onuchic e Allevato (2009), as tarefas de ensino através da Resolução de Problemas precisam ser selecionadas e planejadas a cada aula, tendo em vista o currículo, bem como o nível de compreensão dos estudantes. Essa abordagem exige do professor um planejamento diferenciado, visto que a maioria das atividades que são encontradas nos livros didáticos tem como objetivo a aplicação de conceitos já estudados, sendo assim necessária a adequação ou elaboração de atividades que propiciem a construção de novos conceitos.

Para House (1997, p. 218), "A resolução de problemas é matemática em elaboração", ou seja, os conceitos são construídos no decorrer do processo de resolução através do levantamento de hipóteses e perguntas, o que permite ao estudante ser o protagonista do seu processo de aprendizagem.

Assim, percebe-se que por mais que uma abordagem através da Resolução de Problemas seja uma atividade trabalhosa, que demanda um maior preparo do professor, ela constitui uma atividade que propicia a aprendizagem de conceitos matemáticos de forma participativa, construtiva e significativa, visto que coloca o estudante como centro do processo de aprendizagem. Uma aula de matemática "não se resume a olhar para coisas prontas e definitivas mas para a construção e a apropriação, pelo aluno, de um conhecimento do qual se servirá para compreender e transformar a realidade" (ONUCHIC, 1999, p. 215), desta forma, cabe ao professor permitir que seus estudantes sejam os autores principais deste processo.

Com o intuito de auxiliar os professores na promoção de um ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas que fosse compreensível e significativo para os estudantes, Onuchic e Allevato (2011) estruturaram uma proposta de trabalho para ser utilizada em sala de aula baseada em 9 passos:

1) Preparação do problema – deve ser selecionado um problema que propicie a construção de um novo conceito, sendo este chamado de problema gerador. Destaca-se que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não deve ter sido ainda, apresentado aos estudantes.

2) Leitura individual – cada estudante deve receber uma cópia do problema e fazer a leitura.

3) Leitura em conjunto – os estudantes devem formar grupos e fazer uma nova leitura, agora coletivamente. Caso os estudantes encontrarem dificuldades na leitura, o professor pode fazer a leitura do problema e no caso de existir palavras desconhecidas no enunciado do problema, surge então um problema secundário que deve ser esclarecido.

4) Resolução do problema – depois de compreendido o enunciado do problema, os estudantes devem buscar resolvê-lo de forma cooperativa. Nesta etapa, Onuchic e Allevato (2011, p. 83, grifo do autor) destacam que "Considerando os alunos como co-construtores da *matemática nova* que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula".

5) Observar e incentivar – o professor deixa de ser o transmissor de conhecimento, e passa a observar e analisar o comportamento dos estudantes durante a resolução do problema, bem como estimular um trabalho colaborativo e levar seus estudantes a pensarem e trocarem ideias. O professor deve incentivar os estudantes a utilizarem seus conhecimentos prévios, e técnicas de resolução já conhecidas, deve estimular que os estudantes utilizem diferentes caminhos para chegar a solução. No caso de estudantes com dificuldades na resolução, o professor deve atuar como questionador e orientá-los a fim de possibilitar a continuação do trabalho, no entanto, o professor não deve fornecer caminhos e respostas durante o trabalho dos estudantes.

6) Registro das resoluções na lousa – um estudante de cada grupo deve registrar na lousa a solução encontrada para o problema. Soluções corretas, erradas, ou então encontradas por diferentes caminhos devem ser todas registradas a fim de discuti-las.

7) Plenária – todos os estudantes devem ser convidados a discutirem as resoluções que estão na lousa, a fim de defender os seus pontos de vistas e esclarecer as dúvidas existentes. O professor deve mediar essa discussão e incentivar a participação de todos os estudantes. Segundo

Onuchic e Allevato (2011), este momento da plenária, o qual exige a comunicação dos estudantes, é um momento muito rico para a aprendizagem.

8) Busca do consenso – após analisadas todas as soluções apresentadas pelos grupos, e sanada as dúvidas, o professor deve buscar junto a todos os estudantes um consenso sobre a solução correta para o problema proposto.

9) Formalização do conteúdo – nesta etapa o professor deve registrar na lousa uma apresentação formal, em linguagem matemática, os conceitos e procedimentos que foram construídos ao longo do processo de resolução do problema, ressaltando os diferentes métodos utilizados para chegar a solução.

Mais recentemente, Allevato e Onuchic (2014) acrescentaram mais uma etapa a esse roteiro. A 10ª etapa consiste na proposição e resolução de novos problemas. No parecer das autoras, após a formalização dos novos conceitos, problemas relacionados ao problema gerador devem ser propostos aos estudantes. Para elas, estes novos problemas

> [...] possibilitam analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo ou tópico matemático, gerando um currículo que se configura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas, e assim por diante (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 46).

Ao se trabalhar com a Resolução de Problemas como um meio/estratégia de ensino, dois pontos importantes devem ser ressaltados: o planejamento e a seleção de tarefas que são eficazes para esta abordagem. Os problemas e tarefas devem ser apropriadas e eficazes, de modo a ajudar os estudantes na compreensão das ideias e conceitos que se pretende que estes aprendam.

Segundo Van de Walle (2009, p. 73, "Boas tarefas são atividades '*minds-on*' (ativadoras de mentes) e não apenas '*hands-on*' (ativadoras de mãos)". Assim, percebe-se a importância que deve ser dada a seleção de atividades apropriadas a fim de que a aprendizagem seja construída de forma significativa pelos estudantes que a resolvem.

Caracterização da pesquisa

Com o intuito de avaliar implicações de uma abordagem de ensino orientada pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas na construção de leis de formação das funções seno e cosseno a partir de situações de natureza periódica planejou-se uma sequência de atividades para serem aplicadas em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública.

Essa sequência de atividades tem como objetivo a partir da coleta, análise e investigação de dados, construir leis de formação que descrevem o comportamento periódico de três situações do mundo real (ondas de marés, duração do dia e temperatura do ar). Nesse sentido, são propostas questões que problematizam e norteiam a investigação dos parâmetros, baseadas na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, sendo a abordagem orientada pelas pesquisas de Allevato e Onuchic (2014). O *software* GeoGebra foi uma ferramenta de apoio no processo de solução, sendo utilizado apenas para validar as conclusões obtidas e melhorar a qualidade do ajuste.

Nessas atividades acredita-se que os estudantes reconheçam pela disposição dos pontos que se trata de uma função seno ou cosseno e que identifiquem qual parâmetro deve ser inserido para ajustar à função aos pontos, sendo que a determinação do valor desses parâmetros seja o novo procedimento a ser construído como resultado dos problemas propostos. Participaram da aplicação 27 estudantes que atuaram em 13 grupos mediados pela pesquisadora e o professor de Matemática da instituição.

A pesquisa desenvolvida caracteriza-se de natureza qualitativa, da modalidade investigação-ação, para a qual foi adotado o ciclo básico de 4 etapas proposto por Tripp (2005, p. 446) que começa com "a identificação do problema, o planejamento de uma solução, sua implementação, seu monitoramento e a avaliação de sua eficácia". Os instrumentos de coleta e análise de dados se constituíram através de três ferramentas de registros: diário de campo, documentos (registro das resoluções e construção no *software* GeoGebra) e gravações.

Nessa sequência de atividades, pretende-se que os estudantes construam procedimentos, a partir da disposição dos pontos do gráfico, para determinar os parâmetros da lei de formação que permitem ajustar o fenômeno à uma função. Assim, deseja-se que os estudantes construam, como resultado da resolução dos problemas propostos, procedimentos que permitam determinar o valor das constantes da lei de formação de uma função trigonométrica.

Análise da aplicação

Para a construção dos procedimentos matemáticos que permitem determinar o valor das constantes de uma lei de formação das funções trigonométricas seno e cosseno se apresentou uma sequência de problemas, que constitui o *Momento 02* do Produto Educacional que é parte da dissertação intitulada "Resolução de Problemas e o *software* GeoGebra: um caminho para o ensino das funções trigonométricas seno e cosseno".

Essa sequência de atividades consistia na investigação de três situações de natureza periódica: ondas de marés, duração do dia e temperatura do ar. Todas as situações foram modeladas e analisadas com base em dados que foram coletados pelos estudantes. Em todas as atividades, a partir da disposição dos pontos no gráfico, gerados pelos dados e plotados no GeoGebra, os grupos decidiram se utilizariam ou a função seno ou a cosseno. Na sequência, a construção da lei de formação da função foi inicialmente determinada a partir da estimativa manual dos valores das constantes, o que ocorreu pela ampliação da compreensão construída na sequência de atividades inicial. Após inserida a função estimada no GeoGebra, adaptações foram realizadas, através da ferramenta *controle deslizante*, de modo a obter o melhor ajuste da função aos pontos.

A primeira atividade, *Ondas de Marés*, tratava do fenômeno responsável pela movimentação diária das águas dos mares e oceanos (variação do nível de água do mar sobre a faixa de areia – litoral) e teve como objetivo construir a lei de formação de uma função (trigonométrica) que pudesse descrever o comportamento das marés para determinado porto brasileiro.

Os grupos realizaram a coleta de dados para 2 meses quaisquer de um porto brasileiro, sendo a escolha do porto e dos meses a critério deles. Além disso, ainda puderam optar por analisar a maré alta ou baixa do referido porto. Devido a problemas com a conexão da *Internet* no Laboratório de Informática, bem como a agilidade no processo de aplicação da pesquisa, a pesquisadora orientou que os grupos fizessem a coleta de dados como tarefa extraclasse. A fim de mediar e ajudar os estudantes na coleta de dados, criou-se um grupo no *WhatsApp*, onde foi disponibilizado um tutorial para a coleta de dados e prestou-se auxílio aos estudantes que encontraram dificuldades no decorrer do processo.

A coleta dos dados foi registrada pelos estudantes em uma tabela disponível no Caderno do Estudante, bem como em uma planilha eletrônica e, a partir dos dados e considerando que existisse uma função que relaciona o tempo (em dias) e a altura da maré (em metros), os grupos identificaram a variável independente e dependente para esta situação, bem como qual a relação existente em atribuir a cada par de valores da tabela (dia e altura) um ponto de coordenadas x e y. Neste momento, os grupos solicitaram a mediação da pesquisadora e do professor, uma vez que não lembravam mais o que vinha a ser a variável dependente e independente em uma função. Para retomar estes conceitos, a pesquisadora usou como exemplo a problematização de uma corrida de um táxi.

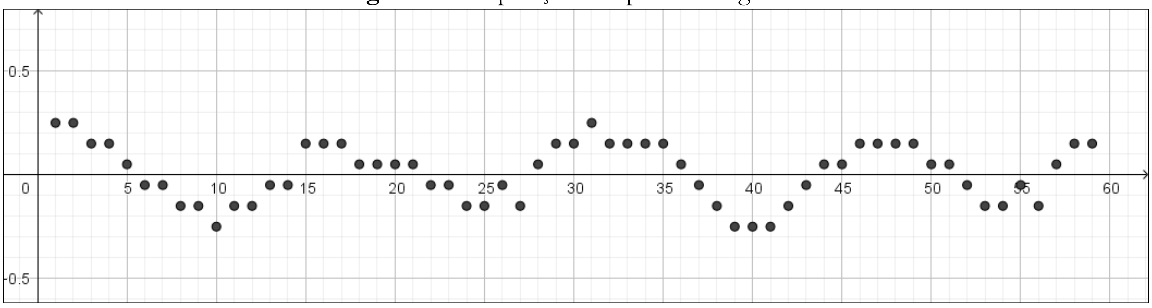
Esse momento de retomada desses conceitos, permitiu a continuidade do problema, conectando conhecimentos prévios com a nova situação apresentada:

> Se a compreensão requer sempre a assimilação da nova informação (por exemplo, o enunciado do problema) a esquemas de conhecimento já disponíveis para que o aluno reconheça uma situação problemática e a formule como um problema, é preciso que se ative algum conhecimento que possa ser relacionado ao enunciado que lhe foi apresentado. Se não existirem esses conhecimentos ou se não forem ativados, não haverá um problema para o aluno. (POZO; CRESPO, 1998, p. 89)

A partir disso, a pesquisadora solicitou que os estudantes voltassem a analisar a situação das marés e identificassem entre as grandezas "tempo" e "altura" qual delas era dependente da outra. Os estudantes identificaram que como a maré é um fenômeno periódico, dentro de um certo número de dias (tempo) a altura voltará a se repetir, logo o comportamento da maré (altura) depende o período de dias (tempo), assim, o tempo corresponde a variável independente e a altura, a variável dependente.

Nesta atividade optou-se pela construção da lei de formação com no máximo três constantes: *a* (responsável pela alteração na amplitude do gráfico), *b* (responsável pela alteração do período), que foram estimados manualmente e *c* (responsável pelo deslocamento horizontal), que foi inserida apenas para a melhoria do ajuste no GeoGebra. Com o intuito de deslocar os pontos coletados para o eixo *x*, conforme apresenta a Figura 1, e desta forma, não inserir a constante *d* responsável pelo deslocamento vertical do gráfico da função na lei de formação, os grupos foram orientados a calcular a média das alturas e subtraí-la de cada uma delas.

Figura 1 – Disposição dos pontos no gráfico



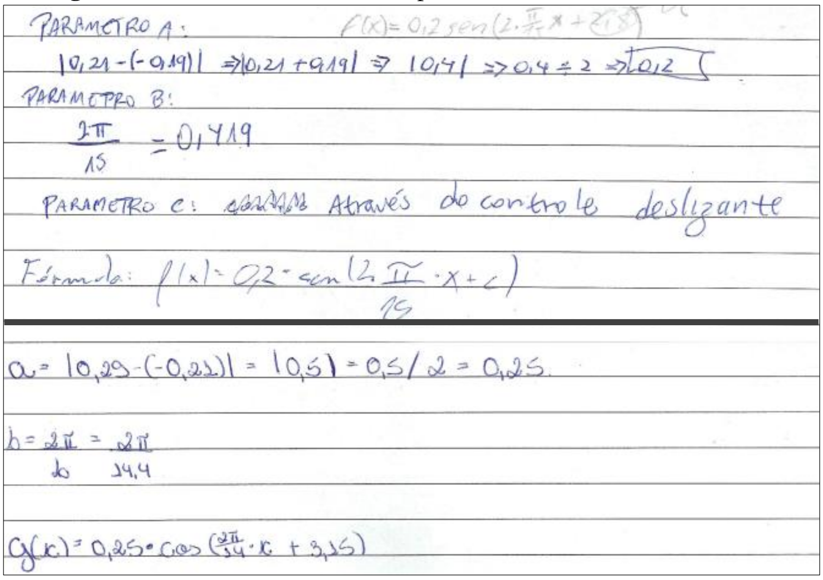
Fonte: Acervo da pesquisa (construção dos estudantes)

Nessa construção os estudantes, ao analisar a disposição dos pontos, conseguiram identificar que, como o conjunto imagem difere de [– 1, 1] e como o gráfico foi comprimido verticalmente, a constante *a* precisaria ser inserida e seu valor em módulo seria menor que 1. E, como a repetição ocorria em um intervalo diferente de 2π eles concluíram que a constante *b* precisaria ser determinada.

Em relação ao procedimento realizado para determinar o valor da constante *a*, os grupos perceberam que este valor tem relação com o intervalo ocupado pelos pontos no eixo *y*. Além disso, verificaram que o intervalo estava dividido em duas partes iguais em relação ao eixo *x*, ou seja, metade do intervalo estava na parte negativa de *y* e a outra metade na parte positiva. Desta forma, os grupos concluíram que o valor da constante *a* corresponde a medida, em módulo, da metade do intervalo ocupado pelos pontos.

Durante a mediação, a pesquisadora questionou alguns grupos se este procedimento para determinar o valor da constante *a* é válido para todas as situações, ou somente quando a curva está igualmente distribuída em relação ao eixo *x*. Na ocasião, uma estudante identificou que quando os pontos não estão divididos em torno do eixo *x*, deve-se calcular qual a medida do intervalo a partir da subtração entre o valor da maior e menor ordenada, em módulo, e dividir em duas partes, obtendo assim, o valor do parâmetro *a*. O procedimento de dois grupos pode ser observado na Figura 2.

Figura 2 – Procedimento realizado para a determinação da constante *a*


PARAMETRO A: $f(x)=0{,}2\,sen(2\cdot\frac{\pi}{15}x+2{,}18)$
$|0{,}21-(-0{,}19)| \Rightarrow |0{,}21+0{,}19| \Rightarrow |0{,}4| \Rightarrow 0{,}4 \div 2 \Rightarrow 0{,}2$
PARAMETRO B:
$\frac{2\pi}{15} = 0{,}419$
PARAMETRO C: Através do controle deslizante
Fórmula: $f(x)=0{,}2\cdot sen(\frac{2\pi}{15}\cdot x+c)$

$a=|0{,}29-(-0{,}21)|=|0{,}5|=0{,}5/2=0{,}25.$
$b=\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{14{,}4}$
$g(x)=0{,}25\cdot \cos(\frac{2\pi}{14}\cdot x+3{,}15)$

Fonte: Acervo da pesquisa

Três grupos determinaram que a função que melhor se assemelhava aos pontos era a função seno, enquanto que os outros dez, constataram que a função cosseno melhor representaria a situação que estavam analisando. A justificativa de escolha da função seno em relação a cosseno, por exemplo, foi analisada pelos estudantes por meio da inserção das funções $f(x)=sen(x)$ e $g(x)=\cos(x)$ na sua forma genérica e sem as constantes *a*, *b*, *c* e *d*. Essa escolha pela função seno ou cosseno foi um dos determinantes da necessidade de inserção da constante *c* para melhor ajustar a função.

Para finalizar a atividade das marés, os grupos determinaram a previsão de altura, cada qual para o seu porto escolhido, para 3 e 6 meses posteriores. Inicialmente os grupos verificaram qual o valor de *x* que representaria o dado solicitado para ser inserido na lei de formação construída e usando a calculadora, calcularam qual a previsão de altura para aquele dia. Além disso, as equipes inseriram no GeoGebra, para a validação do cálculo, o ponto coordenado referente ao dia e a altura previstos. Percebeu-se, praticamente em todos os grupos, pequenos erros cometidos no cálculo da ordenada destes pontos, uma vez que alguns dos grupos tinham a calculadora em RAD, outros em DEG, solicitando auxílio para compreender como usar a calculadora. A utilização da calculadora nesse contexto vai ao encontro do que ressalta Van de Walle (2009, p. 131):

> Quando os estudantes chegam a compreender os significados das operações, eles devem ser expostos a problemas realistas com números realistas. Os números podem estar além de suas habilidades para computar, mas a calculadora torna esses problemas realistas acessíveis. [...] O uso efetivo de calculadoras é uma habilidade importante que será ensinada melhor usando-a regular e significativamente.

Com a realização dessa atividade, pode-se perceber o desenvolvimento da autonomia em alguns estudantes, uma vez que, a partir do momento que identificavam erros, tanto na lei de formação da função quanto no cálculo da previsão para os dias solicitados, começavam eles mesmos a buscarem solucionar o problema, algumas vezes compartilhando informações com os grupos vizinhos.

A segunda atividade, *Duração do dia*, teve como objetivo a construção da lei de formação de uma função trigonométrica que pudesse descrever a duração do dia para uma determinada cidade brasileira. A coleta de dados foi realizada para um período de um ano, que corresponde a um ciclo. A duração do dia foi analisada de 10 em 10 dias, sendo que para cada dia desse intervalo, os grupos registraram a hora do nascer e do pôr do sol, para posteriormente realizar o cálculo e identificar a duração do dia, aqui entendido como o tempo de luminosidade solar. A pesquisadora orientou que mesmo que o grupo optasse por analisar a duração da noite, os dados a serem coletados também seriam o horário de nascer e pôr do sol, uma vez que a duração da noite era obtida considerando a duração do dia como 24h e subtraindo o tempo de luminosidade solar.

Os grupos puderam escolher uma cidade brasileira e qual a situação gostariam de analisar: duração do dia ou duração da noite. A coleta de dados foi realizada como atividade extraclasse, tendo em vista a conexão da *Internet* e a agilidade no processo de aplicação da pesquisa. Foi elaborado e disponibilizado no grupo do *WhatsApp* um tutorial contendo todas as informações necessárias para a realização da tarefa extraclasse. Nesse sentido o *WhatsApp* se tornou uma extensão da sala de aula, ampliando a comunicação e possibilitando a troca de informações de forma mais imediata, proporcionando a construção de conhecimento para além da discussão presencial, o que vai ao encontro do que aponta Lévy (1999, p. 172) quando afirma que:

> O uso crescente das tecnologias digitais e das redes de comunicação interativa acompanha e amplifica uma profunda mutação na relação com o saber [...] Ao prolongar determinadas capacidades cognitivas humanas (memória, imaginação, percepção), as tecnologias intelectuais com suporte digital redefinem seu alcance, seu significado, e algumas vezes até mesmo sua natureza.

A coleta dos dados foi registrada em uma tabela disponível no Caderno do Estudante e, a partir do horário do nascer e pôr do sol, foi calculado a duração do dia (em horas). Para o cálculo da duração dos dias foi disponibilizado um Apêndice contendo orientações de como realizar esta etapa no Excel. Neste momento da atividade, houveram alguns problemas, visto que os computadores do Laboratório utilizavam as planilhas eletrônicas do sistema LINUX e, ainda, alguns grupos optaram por utilizar as planilhas do Google. As principais dificuldades deram-se em relação ao formato do número na célula da planilha em que seria exibida a duração do dia em horas.

Após identificado a variável dependente e independente, as informações referentes aos dias e a respectiva duração do mesmo, foram inseridas no GeoGebra na forma de ponto coordenado a fim de visualizar o comportamento deste fenômeno. Como a coleta foi realizada para um período de um ano, o gráfico apresentou apenas um período do comportamento cíclico, diferente da atividade das ondas de marés onde pode ser observado alguns períodos.

Quando inseridos os pontos no GeoGebra, para alguns grupos o gráfico não apresentava um comportamento similar ao de uma função trigonométrica, devido a dimensão dos eixos coordenados. A pesquisadora passou pelos grupos observando como estava ficando a disposição dos pontos e auxiliando os estudantes no ajuste das dimensões dos eixos para que conseguissem observar com maior precisão o comportamento da curva.

Inseridos os pontos, os grupos escolheram dentre as funções seno e cosseno, qual delas gostariam de modelar para a situação. Como já haviam determinado a amplitude na atividade das ondas de marés, os grupos já foram observando qual o intervalo ocupado pelos pontos em relação ao eixo y, fizeram a subtração e dividiram o resultado por dois, determinando assim, o valor do parâmetro a responsável pela alteração da amplitude do gráfico. Para a determinação do parâmetro b responsável pela alteração do período, alguns grupos se mostraram inseguros. Os grupos tinham compreensão de que o período era de um ano, mas num primeiro momento não sabiam como expressar, vindo lançar como hipótese que o parâmetro b deveria ser igual a 1. Desta forma, a pesquisadora a partir de questionamentos mediou a situação para que os estudantes chegassem a ideia de que como o período estava sendo medido em dias, e como já haviam percebido que corresponde a um ano, então o valor inicial do parâmetro b deve ser 365.

Para determinar o valor do parâmetro d, responsável pelo deslocamento vertical da função, alguns grupos já foram construindo a função no GeoGebra e testando valores através da ferramenta *controle deslizante*. No entanto, a pesquisadora enquanto acompanhava a construção da lei da função nos grupos, foi questionando se havia alguma forma de determinar o valor do parâmetro d a partir de cálculos, porém os estudantes, em sua maioria, desconheciam e comentaram não terem ideia de como este valor poderia ser calculado. Entretanto, dois grupos comentaram da possibilidade de existir alguma relação com tempo médio, em horas, da duração dos dias, visto que para dias diferentes tem-se diferentes durações, desta forma, uma das ideias seria encontrar o valor médio.

Todos os grupos determinaram o valor da constante *d* por meio do cálculo da média das durações dos dias para o período analisado. Este cálculo foi realizado diretamente nas planilhas eletrônicas, como no próprio GeoGebra. Esse procedimento para determinação da constante *d* foi o novo conhecimento a ser construído pelos estudantes como resultado da resolução dos problemas.

Depois de determinado o valor dos parâmetros *a*, *b* e *d*, os grupos que perceberam que ainda era possível algum ajuste do gráfico da função sobre os dados coletados, inseriram o parâmetro *c* e através do controle deslizante, determinaram um valor para o mesmo. Algumas equipes relataram que com os parâmetros responsáveis pela alteração na amplitude, período e deslocamento vertical, o gráfico da função já apresentava um bom ajuste, sendo assim, desnecessário a inserção do parâmetro *c*.

Depois de construída uma lei de formação que pudesse representar a situação que estava sendo analisada, os grupos calcularam a partir da lei, qual a duração do dia (em horas) para os dias em que se iniciam as 4 estações do ano, isto é, a duração dos dias 20/03 (início do outono), 21/06 (início do inverno), 22/09 (início da primavera) e 21/12 (início do verão). Para tanto, os estudantes tiveram que inserir estes dias na tabela e analisar qual o valor de *x* correspondente para esta data. Determinado o valor de *x*, o mesmo foi substituído na lei da função construída por cada grupo e calculado a duração para este dia. Em seguida, o dia (*x*) e sua duração (*y*) foram inseridos no GeoGebra na forma de ponto coordenado.

Novamente alguns grupos encontraram dificuldades no cálculo destes valores. Assim que realizaram o cálculo e determinaram o valor de *y*, os estudantes inseriram as informações na forma de ponto coordenado para validar o resultado calculado. Quando percebiam que o ponto não ficava sobre o gráfico da função solicitavam a mediação da pesquisadora e do professor, que por meio de questionamentos, os faziam justificar suas análises e analisar seus erros, estimulando um processo cíclico na resolução do problema no qual há um "*input* do estudante → *feedback* do computador → reflexão do estudante → novo *input* do estudante, até que o aluno tenha compreendido o conceito envolvido (ALLEVATO, 2005, p. 87, grifo do autor).

Percebeu-se que na maioria das vezes o erro no cálculo da duração dos dias solicitados deu-se devido a não inserção do valor do parâmetro *c* na lei da função, ou seja, os grupos determinaram um valor para *c* no entanto, não registraram a nova lei de formação no caderno e acabavam utilizando para o cálculo a lei de formação sem o valor do parâmetro *c* enquanto que no GeoGebra a mesma tinha um valor definido para *c*. Houveram também erros ocasionados pela configuração e linguagem da calculadora.

A terceira atividade, *Temperatura do ar*, teve como objetivo a construção da lei de formação de uma função trigonométrica que descrevesse o comportamento periódico da temperatura do ar para uma determinada cidade brasileira. A coleta de dados foi realizada como atividade extraclasse, sendo disponibilizado pela pesquisadora um tutorial para mediar o processo. Os dados foram coletados para 2 dias, obedecendo um intervalo de 3 horas, a escolha da cidade ficou a critério do grupo.

Considerando que existe uma função que relaciona o tempo (em horas) e a temperatura do ar (em graus) os grupos identificaram que a variável dependente nesta situação corresponde a temperatura do ar e a independente, ao tempo medido em horas. Em diálogo com a pesquisadora, um grupo relatou que:

> "Geralmente começamos com uma temperatura mais baixa (mínima), sendo que no decorrer do dia ela atinge seu ponto mais alto (máxima) vindo a diminuir a noite, assim, pode-se dizer que a temperatura é dada em função das horas, ou seja, para determinada hora tem-se uma temperatura. Mas isso não vale para todos os dias. E agora a temperatura está variando bastante também".

Verificou-se que muitos grupos relacionaram as grandezas com os eixos. Por exemplo, como a grandeza *tempo* estava no eixo *x*, a mesma correspondia a variável independente, e como a *temperatura* estava no eixo *y*, esta correspondia a variável dependente.

A partir dos pontos inseridos no GeoGebra, os grupos buscaram identificar qual a função que poderia descrever essa situação. Neste momento, verificou-se que a maioria dos grupos encontraram dificuldades em analisar o comportamento dos dados no gráfico, uma vez que os mesmos não começavam próximos à origem.

Alguns grupos consideraram um eixo imaginário *y* onde iniciavam os pontos, para então considerar a imagem para o instante $x = 0$ e determinar se poderia ser ou a função seno ou a cosseno. Outros grupos, apenas escolheram uma das funções para então ajustar a mesma para a situação, considerando que tanto a função seno como a cosseno podia ser ajustada de modo a descrever uma mesma situação. Alguns grupos fizeram a coleta de dados iniciando pelas 00:00 horas do dia, desta forma, os pontos começaram no eixo *y* e não encontraram dificuldades em identificar a função. Um grupo fez o deslocamento dos pontos no eixo *x*, com o intuito de começar em $x = 1$ para facilitar a análise. Nesse momento percebe-se a autonomia dos estudantes na manipulação dos dados e nas decisões que determinavam os caminhos de solução, evidenciando que os alunos estavam "comprometidos nos processos de descobrir procedimentos matemáticos, sem aceitá-los cegamente" (VAN DE WALLE, 2009, p. 61).

Para esta atividade, os grupos tiveram que determinar inicialmente três constantes: amplitude, período e deslocamento vertical. Sendo analisado posteriormente, a necessidade ou não, da inserção da constante responsável pelo deslocamento horizontal do gráfico, através da inserção da lei de formação no GeoGebra, onde estavam registrados os pontos coletados.

Depois de construída uma lei de formação que pudesse descrever o comportamento da temperatura do ar para determinado período e cidade, os grupos calcularam a partir da mesma, qual a temperatura do ar as 12h do dia seguinte aos dias analisados. Inicialmente foi analisado qual o valor de x correspondente para este horário, em seguida, o mesmo foi substituído na lei de formação construída pelo grupo e assim, determinada a temperatura. A fim de validar a solução, o tempo, em horas (x) e sua temperatura (y) foram inseridos no GeoGebra na forma de ponto coordenado. Ressalta-se que nesta atividade ainda houveram erros relacionados ao cálculo da temperatura para o horário solicitado, no entanto, foram menos grupos quando comparado com as duas atividades anteriores. Percebeu-se uma familiarização do grupo com a linguagem da calculadora que estavam utilizando.

Nessa atividade da temperatura do ar, verificou-se que algumas das situações analisadas apresentaram um comportamento que dificultou a construção de uma lei de formação que pudesse descrever a situação, uma vez que para um dia não houve muita variação de temperatura, enquanto que para outro já houve uma variação maior.

Considerações finais

As atividades desenvolvidas tinham um caráter investigativo, nas quais os estudantes foram estimulados a analisar tais situações e a partir da coleta de dados, refletir, formular e confirmar hipóteses para a mesma, determinando o valor das constantes necessárias para ajustar uma função que descrevesse o fenômeno. Clement e Terrazzan (2011) destacam que as práticas de ensino que trazem para a sala de aula o caráter de investigação científica reassumem a importância da utilização de *problemas* no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, salientam que estas práticas possuem uma visão construtivista, objetivando o protagonismo do estudante na sua aprendizagem.

No decorrer da realização das atividades, verificou-se que os estudantes se sentiram desafiados a analisar tais fenômenos e a partir de dados reais, modelar uma função que poderia descrevê-los. Ao final, quando viram que conseguiram construir uma lei de formação que pudesse descrever tal situação, quando perceberam que foram capazes de estruturar em linguagem matemática uma situação do mundo real, os estudantes mostraram-se entusiasmados consigo mesmos, vindo a acreditar que são capazes de dar significado à matemática. Tal percepção vai ao encontro do que destaca Van de Walle (2009, p. 59, grifo do autor) "*A resolução de problemas desenvolve nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer matemática e de que a matemática faz sentido*". A fala de uma das estudantes, registrada em áudio, revela esse sentimento:

> "Nossa profe, não acredito que dá certo, conseguimos colocar a função bem certinha nos pontos, que máximo!"

Com relação a uma abordagem com caráter investigativo na Resolução de Problemas, Clement e Terrazzan (2011, p. 91) destacam que:

> É sempre importante que propicie um trabalho em grupo e que envolva situações vivenciais, as quais devem ser apresentadas o mais abertas possíveis, de modo que estimulem os alunos a levantarem as 'variáveis' envolvidas, os parâmetros relevantes e as possibilidades de resolução, exigindo, assim, uma mobilização dos conhecimentos necessários para o encaminhamento do processo de resolução.

No início da resolução das atividades, especificamente na de *Ondas de marés*, os estudantes se mostraram mais inseguros durante a resolução, solicitando a mediação e avaliação da pesquisadora. Contudo, na resolução das atividades *Duração do dia* e *Temperatura do ar*, foram mostrando-se mais confiantes e autônomos nos processos de resolução, uma vez que buscavam relacionar as mesmas com a atividade *Ondas de marés*. No que diz respeito a ideia de relacionar, Allevato e Onuchic (2009, p. 09) destacam que:

> [...] a compreensão de matemática, por parte dos alunos, envolve a ideia de que compreender é essencialmente relacionar. Ressalte-se que as indicações de que um estudante entende, interpreta mal ou não entende ideias matemáticas específicas surgem, com frequência, quando ele resolve um problema.

Verificou-se que a maioria dos estudantes já estavam mais familiarizados com a dinamicidade das aulas e persistia cada vez menos em esperar um comando e validação da pesquisadora e do professor para prosseguir na realização das atividades seguintes, uma vez que esse direcionamento era substituído por questionamentos que os levassem a tirar suas próprias conclusões.

As dificuldades destas atividades limitaram-se ao ajuste de uma lei de formação para quando o fenômeno apresentava um comportamento constante dentro do período escolhido pelo grupo para análise e na previsão do fenômeno para dias/horas que não estavam tabelados. As dificuldades para a previsão do fenômeno estavam relacionadas a linguagem da calculadora que os grupos utilizaram, uma vez que dependendo da calculadora, a forma de digitar as informações era diferente, além da necessidade da medida do ângulo estar em radianos (rad), quando, a maioria dos grupos, estavam com a calculadora em graus (deg).

Quanto a utilização do GeoGebra, no início, a maioria dos grupos solicitou auxílio uma vez que, dependendo da dimensão dos eixos, o comportamento do fenômeno, especificamente a visualização do período, não ficava bem explícito. A partir das orientações da pesquisadora, os grupos conseguiram ajustar a visualização de modo a identificar o período da situação que estava sendo analisada. Quanto a inserção da lei de formação na sua forma genérica, bem como, no ajuste dos valores das constantes através dos *controles deslizantes*, os estudantes já realizavam com maior autonomia e segurança, no entanto, por conta das particularidades do *software* no que diz respeito a inserção dos comandos na *Caixa de Entrada*, alguns erros foram cometidos. Nessa perspectiva, Silva (2015a, p. 42) destaca que "Digitar comandos de forma incorreta pode ser uma ferramenta de aprendizagem ao passo que se faz a correção e verificação".

Ainda relacionado ao uso de recursos tecnológicos, Resolução de Problemas e a simulação de situações no processo de ensino e aprendizagem, Miskulin (1999, p. 76) afirma que:

> Nesses ambientes, os estudantes são colocados em situações nas quais eles podem manipular variáveis e obterem o retorno dessa interação. [...] Em geral, o uso de programas desse tipo ajuda a desenvolver habilidades, nos estudantes, de analisar o processo de resolução de problema; dividir o problema em pequenas partes; identificar informações necessárias e desnecessárias, e ainda procurar uma seqüência lógica; alcançar a resposta e expressar essa resposta no computador.

Além de utilizar o GeoGebra para visualização do comportamento dos fenômenos periódicos, bem como, ajustar uma lei de formação que os descrevessem, os estudantes também puderam fazer uma previsão para outros dias/horas que não estavam tabelados. Desta forma, proporcionou-se através do uso do GeoGebra a simulação e resolução de situações que possibilitaram e estimularam o espírito de investigação dos estudantes.

A dinamicidade do GeoGebra também deve ser destacada, uma vez que permite a manipulação de construções já finalizadas sem perder suas características essenciais. Isto é, percebendo algum erro na construção, os estudantes realizavam a alteração necessária, sem a necessidade de iniciar a construção do zero. Silva (2015, p. 34) também destaca essa vantagem do GeoGebra:

> A vantagem é que é feita uma construção que pode ser salva e editada posteriormente, de acordo com a necessidade. Vale salientar que as construções feitas no GeoGebra, respeitando-se as propriedades do processo construtivo, são facilmente manipuladas, o que permite dar grande ênfase ao fator movimento da construção. Ou seja, pode-se mudar a forma da construção sem alterar suas propriedades.

Um ponto significativo desta sequência de atividades foi que os estudantes conseguiram perceber a importância do estudo das funções trigonométricas, bem como a sua aplicabilidade em situações do mundo real. No final da aplicação das atividades foi questionado se os estudantes tinham imaginado que as situações que foram analisadas poderiam ser descritas através de uma função trigonométrica. Alguns grupos haviam mencionado algumas das situações no questionamento realizado nas atividades iniciais, no entanto, acrescentaram que não tinham imaginado de que forma o comportamento periódico destes fenômenos poderia ser traduzido para a linguagem matemática. O relato de um grupo, evidencia tal percepção:

> "Não achávamos que fenômenos do cotidiano poderiam ser transformados em funções. É mais interessante estudar assim, também é muito importante para compreender os fenômenos que acontecem e se repetem de uma maneira específica".

Ao final dessas atividades, os estudantes avaliaram o estudo das funções seno e cosseno como sendo um conteúdo de relevância na Educação Básica, visto sua importância na descrição de situações do mundo real.

Por fim, cabe salientar que a metodologia de Resolução de Problemas foi avaliada na perspectiva de contribuição para a aprendizagem, com foco nos estudantes. Sugere-se que outras pesquisas sejam realizadas avaliando as implicações no fazer docente dos professores.

Referências

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Associando o computador à Resolução de Problemas fechados:** Análise de uma experiência. 2005. 378 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensinando Matemática na sala de aula através da Resolução de Problemas. **Boletim GEPEM,** Rio de Janeiro, v. 55, p.1-19, dez. 2009.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: LOURDES DE LA ROSA ONUCHIC (2014) (Org.). **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

CLEMENT, Luiz; TERRAZZAN, Eduardo Adolfo. Atividades Didáticas de Resolução de Problemas e o Ensino de Conteúdos Procedimentais. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias,** Buenos Aires, v. 6, n. 1, p.87-101, jul. 2011.

DANTAS, Aleksandre Saraiva. **O uso do GeoGebra no ensino de trigonometria: uma experiência com alunos do ensino médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte.** 2013. 78 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2013.

ECHEVERRÍA, María del Puy Pérez. A Solução de Problemas em Matemática. In: POZO, Juan Ignacio. **A solução de problemas:** Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 43-65.

HOUSE, Peggy A.. Aventurando-se pelos caminhos da resolução de problemas. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E.. **A resolução de problemas na matemática escolar.** 6. ed. São Paulo: Atual, 1997. p. 218-234. Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo.

LÉVY, Pierre. **Cibercultura.** São Paulo: 34, 1999.

MISKULIN, Rosana Giaretta Sguerra. **Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino/aprendizagem da geometria.** 1999. 577 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

ONUCHIC, Lurdes de La Rosa. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções e Perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2009. p. 213-231.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática,** Rio Claro, v. 25, n. 41, p.73-98, dez. 2011.

PIRONEL, Márcio. **A Avaliação integrada no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.** 2002. 205 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

POZO, Juan Ignacio; CRESPO, Miguel Ángel Gómez. A solução de Problemas nas Ciências da natureza. In: POZO, Juan Ignacio; PROBLEMAS, A Solução de. **A solução de problemas:** Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 67-102.

SANTOS, Darcson Capa dos; CURY, Helena Noronha. O uso de materiais manipuláveis como ferramenta na resolução de problemas trigonométricos. **Vidya,** Santa Maria, v. 31, n. 1, p.49-61, jun. 2011.

SILVA, Jander Carlos Silva e. **As novas tecnologias no contexto escolar:** uma abordagem sobre aplicações do GeoGebra em trigonometria. 2015b. 85 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015a.

SILVA, Maria Deusa Ferreira; SOUZA, Adenise Vieira de. Uma proposta de uso da metodologia da resolução de problemas para integrar a disciplina matemática às disciplinas específicas de um curso técnico em agropecuária. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 6, n. 1, p. 78-92, jan./abr. 2016.

TRIPP, David. Pesquisa-ação: uma introdução metodológica. **Educação e pesquisa**, v. 31, n. 3, p. 443-466, 2005.

VILA, Antoni; CALLEJO, María Luz. **Matemática para aprender a pensar:** O papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006. 212 p.

VAN DE WALLE, John A. **Matemática no ensino Fundamental:** Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. Tradução: Paulo Henrique Colonese.