RECM
REVISTA DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

A RELAÇÃO ENTRE O DISCURSO DEDUTIVO E ARGUMENTATIVO NA CONSTRUÇÃO DE PROVAS EMPÍRICAS E TEÓRICAS POR UM GRUPO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

THE RELATION BETWEEN DEDUCTIVE AND ARGUMENTATIVE DISCOURSE IN THE CONSTRUCTION OF EMPIRICAL AND THEORETICAL EVIDENCES BY A GROUP OF MATHEMATICS TEACHERS

Eberson Paulo Trevisan[1]
José Luiz Magalhães de Freitas[2]

Resumo

No presente artigo, apresentamos resultados de uma investigação realizada com um grupo de professores que ensinam matemática, acerca da mobilização de elementos significativos do discurso dedutivo e argumentativo, posto em evidência nas produções de Raymond Duval e Marie-Agnès Egret. O cenário para análise dos discursos utilizados pelos professores se configura na construção de propostas de atividades, por parte destes professores, em duas categorias, as quais denominamos provas empíricas e provas teóricas. Percebemos, apesar de haver várias propostas apresentadas com equívocos, do ponto de vista matemático, haver em suas resoluções uma clara intenção de uso do discurso dedutivo nas provas teóricas e uma aproximação com o uso do discurso argumentativo nas propostas de provas empíricas apresentadas pelos professores. Essas constatações permitiram trazer uma reflexão sobre o papel desses dois modelos de discurso no processo de ensino, especialmente no que tange à geometria e à produção de provas em sala de aula.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Provas Empíricas e Teóricas. Discurso Dedutivo. Discurso Argumentativo.

Abstract

In the present article, we present the results of an investigation carried out with a group of teachers who teach mathematics about the mobilization of significant elements of deductive and argumentative discourse, highlighted in the productions of Raymond Duval and Marie-Agnès Egret. The scenario for the analysis of the discourses used by the teaches is featured by the construction of proposals of activities, by these teachers, in two categories, which we call empirical tests and theoretical tests. Despite several proposals presented with misconceptions, from a mathematical point of view, there is a clear intention to use the deductive discourse in the theoretical tests and an approximation with the use of argumentative discourse in the proposals of empirical evidence presented by the teachers. These findings allowed us to reflect on the role of these two models of discourse in the teaching process, especially with regard to geometry and the production of evidences in the classroom.

Keywords: Teaching Geometry. Empirical and Theoretical Evidences. Deductive Discourse. Argumentative Discourse.

[1] Professor Adjunto da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT) Instituto de Ciências Naturais, Humanas e Sociais (ICNHS).
[2] Professor do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul/UFMS.

Introdução

No artigo, apresentamos um estudo sobre relação e utilização da estrutura do discurso dedutivo e argumentativo na articulação entre duas categorias de provas: empíricas e teóricas. A busca de construção de provas nessas duas categorias foi realizada por um grupo de professores que ensinam Matemática, todos pertencentes à rede pública estadual do município de Sinop, norte do estado de Mato Grosso.

Para produção e análise dos dados, buscamos uma aproximação metodológica com a Engenharia Didática de Artigue (1996). A produção dos dados se deu em um curso de extensão oferecido a professores de Matemática. Neste ambiente foi aplicado um conjunto de atividades previamente selecionadas, que visavam à construção de propostas de trabalho para explorar a produção de provas empíricas e teóricas no contexto da sala de aula, que envolviam propriedades geométricas com possibilidades de dedução, especialmente por meio do emprego dos casos de congruência de triângulos.

No presente artigo, assim como ocorreu no curso, assumimos como provas empíricas, seja para convencimento próprio ou comunitário, todas aquelas produzidas em um processo que visassem à constatação da verdade de uma dada propriedade por meio da experimentação, ou seja, quando a argumentação elaborada se apoia no manuseio de materiais manipuláveis, na construção e na comparação sobre desenhos ou manipulação de figuras, em qualquer forma de representação material.

Como provas teóricas, assumimos as que visam à constatação da verdade de uma proposição por meio de uma argumentação pautada em conceitos e proposições matemáticas, e baseadas na estrutura de um discurso dedutivo, isto é, provas aceitas como demonstrações do ponto de vista matemático. Vale destacar que, apesar de nem todas as provas produzidas pelos professores no curso utilizarem o encadeamento lógico aceito pela comunidade matemática, a opção pela tentativa de emprego de elementos teóricos matemáticos nos levou a nomeá-las e caracterizá-las como provas teóricas.

Nesta pesquisa, investigamos as marcas discursivas dessas duas categorias de provas produzidas pelos professores colaboradores da pesquisa. Destacamos o explícito reconhecimento da utilização de um discurso dedutivo próprio na produção das provas teóricas, oposto à utilização de elementos discursivos mais próximos da argumentação cotidiana nas provas empíricas que, nas produções analisadas, não visaram aprofundar o conhecimento das propriedades envolvidas, se limitando ao convencimento da veracidade da proposição explorada por meio dos órgãos do sentido.

Na próxima seção, apresentaremos, inicialmente, uma revisão teórica com o objetivo de trazer para discussão os elementos discursivos que marcam tanto o discurso dedutivo quanto o discurso argumentativo. Para isso, teremos em vista elementos teóricos levantados por Raymond Duval e Marie-Agnès Egret ao longo de suas pesquisas. Posteriormente, apresentaremos os elementos metodológicos da pesquisa e, em seção própria, a análise e discussão dos dados produzidos.

Discurso dedutivo e argumentativo: um olhar com elementos teóricos de Duval e Egret

Apesar de Raymond Duval ser mundialmente conhecido por sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), ao iniciar seu trabalho no IREM[i] de Strasbourg ele não optou por esta linha de pesquisa, conforme ele mesmo nos apresenta em Duval (2013, p. 11): "a primeira era sobre a compreensão de demonstrações por alunos do Collège[ii]." Assim, é a sua segunda linha de trabalho que será relacionada à variedade das formas de linguagem, tão frequentemente utilizada na atividade matemática, a qual desencadeou a sua TRRS, que no presente artigo não será diretamente enfocada.

Nesta primeira linha de pesquisa, Duval fez boa parte das produções em parceria com Marie-Agnès Egret, como pode ser constatado nos artigos apresentados sobre a teoria. Nesta linha de pesquisa, ambos buscam compreender, do ponto de vista cognitivo, o que influencia na compreensão de uma demonstração, ou o que vem a ser uma demonstração por parte dos alunos. Suas análises e reflexões nos conduzem a lançar um olhar sobre as particularidades do discurso dedutivo, presente na condução de uma demonstração, e suas diferenças em relação ao discurso argumentativo.

O que entra em questão é, primeiramente, o fato de que raciocínio dedutivo e raciocínio argumentativo são completamente diferentes, em que o autor esclarece ser o raciocínio argumentativo o modo mais natural de raciocínio e, nesse sentido, o mais presente em nosso cotidiano, enquanto o raciocínio dedutivo seria mais específico e relacionado ao trabalho do matemático. Apesar da existência dessa diferença, "a tomada de consciência, na Educação Matemática, desse modo natural de raciocínio que é a argumentação, é relativamente recente" (DUVAL, 1993, p. 37).

Contudo, é válido destacar que a tomada de consciência da diferenciação entre esses modos de raciocínios já se faz presente em documentos oficiais que orientam a educação brasileira, como é o caso dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, do 6º ao 9º ano, os quais destacam:

> Uma argumentação não é, contudo, uma demonstração. A argumentação é mais caracterizada por sua pertinência e visa ao plausível, enquanto a demonstração tem por objetivo a prova dentro de um referencial assumido. Assim, a

> argumentação está mais próxima das práticas discursivas espontâneas e é regida mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal que, por sua vez, sustenta a demonstração (BRASIL, 1998, p.70).

Essa distinção entre os dois tipos de discurso, apresentada pelos PCN, aproxima-se bem das distinções proporcionadas por Raymond Duval e Marie-Agnès Egret em seus estudos referentes ao tema, como veremos ao longo deste artigo. Contudo, demandam a necessidade de uma melhor compreensão sobre como essas diferenças influenciam os processos de ensino e aprendizagem, o que acreditamos ser possível a partir de uma reflexão sobre os apontamentos levantados pela teoria descrita pelo autor a respeito da análise dos discursos empregados na estrutura destas formas de apresentação matemática.

Duval e Egret (1989, p. 25) esclarecem que "a demonstração demanda, de fato, uma atividade cognitiva específica e sua 'aprendizagem' não está ligada a uma situação de interação social." Assim sendo, a prática do discurso dedutivo, requerido em uma demonstração, necessita de um modo de processamento cognitivo diferente de outros discursos mais comumente empregados nas atividades cotidianas. Como expressam Duval e Egret (1989):

> A atividade cognitiva correspondente a uma demonstração apresenta duas características específicas em relação a toda outra forma de funcionamento do raciocínio (indução, argumentação, interpretação, ...). Em uma parte, ela *articula os enunciados em função do estatuto que lhe é reconhecido* e não em função de seu significado. Em outra parte, ela *progride por substituição de enunciados* e não por encadeamento de enunciados. (p. 26, grifo do autor).

Essas duas características apresentadas pelos autores determinam o que eles chamam de estrutura profunda da demonstração. No desenvolvimento de uma demonstração, essas duas características relacionam-se entre si, pois articular os enunciados em relação ao estatuto que a esse é reconhecido implica dizer que os enunciados são trabalhados de acordo com o que eles são: um axioma, um teorema, uma hipótese, uma tese etc.; e não em relação ao significado transposto pelo enunciado.

Esses estatutos, aos quais os enunciados em uma demonstração são articulados, são chamados pelos autores, em Duval e Egret (1993), de "estatuto teórico". Eles já se encontram fixados antes mesmo de se produzir um raciocínio buscando validar uma dada proposição, e os enunciados constantes no estatuto teórico vão "constituindo o reservatório de 'meios' no qual pode-se extrair o que 'precisamos para demonstrar.'" (DUVAL e EGRET, 1993, p. 118).

A progressão por substituição de enunciados que ocorre na condução de uma demonstração, apresentada na estrutura profunda, assim se faz justamente em relação ao estatuto no qual o enunciado é reconhecido, ou seja, o estatuto teórico; "esta substituição se efetua explicitamente em virtude de um enunciado normativo (uma definição, um axioma ou um teorema) que funciona como uma regra permitindo essa substituição." (DUVAL e EGRET, 1989, p. 27).

Os elementos que constituem essa regra de substituição, advindos do estatuto teórico, constituem o que Duval e Egret (1993) chamam de estatuto operatório, pois são neles que nos apoiamos para operar as substituições necessárias à condução de uma demonstração. A grande diferença entre esses dois discursos instaura-se, então, no fato de que "em um passo de dedução as proposições não intervêm diretamente em função de seu conteúdo, mas em função de seu estatuto operatório." (DUVAL, 1991, p. 235). Na argumentação cotidiana, esse fato é oposto, pois, nele, segundo o autor, "o conteúdo semântico da proposição é, portanto, primordial." (Ibidem, p. 235).

Para os autores, a compreensão dessas características nos conduz a fatos essenciais para compreender o que é uma demonstração. Primeiramente porque o que permite satisfazer a regra de substituição em uma demonstração muda de um teorema para outro. Além disso, "de uma situação proposta para outra, o estatuto de um enunciado pode mudar: em um pode aparecer como hipótese, em outro como proposição para demonstrar." (DUVAL; EGRET, 1989, p. 27), mesmo que o conteúdo dos enunciados seja o mesmo em ambos.

Como exemplo para esses fatos, podemos olhar para os conhecidos teoremas do ângulo externo de um triângulo e o da soma dos ângulos internos de um triângulo. Para demonstrar o primeiro, temos como tese (o que queremos demonstrar) que a medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois internos não adjacentes. Realizada a demonstração deste, o que aqui temos como tese serve para o teorema dos ângulos internos como uma proposição que permite efetuar substituições para completar a sua demonstração. Ou seja, seu estatuto mudou em relação ao outro teorema, assim como os elementos disponíveis para utilizar como regra para operar a substituição mudaram, ao menos agora pelo acréscimo de um elemento.

Essa necessidade de operar substituições para sair de um ou mais enunciados e "chegar" a outro, revelada pela estrutura profunda de uma demonstração, conduz ao fato, segundo Duval e Egret (1989, 1993), de que realizar uma demonstração aproxima-se do ato de efetuar um cálculo em Matemática. Isso pode ser facilmente observado, por exemplo, ao operarmos um cálculo, como: $\sqrt{4}+5$, realizamos uma substituição de $\sqrt{4}$ por 2, pois $\sqrt{4}$ pode, como uma das possibilidades, corresponder ao objeto matemático 2, para permitir os tratamentos necessários em um registro onde se opera mais facilmente.

Contudo, ocorre que os passos de uma demonstração, no contexto em que normalmente é apresentado, utilizando-se do registro em linguagem natural, com o emprego de conectores lógicos, podem não ser adequados para visualizar essa aproximação existente entre a operação de substituição na realização de um cálculo e na demonstração. Esse fato, segundo Duval e Egret (1989), nos leva a ver uma demonstração mais próxima de discurso argumentativo.

Porém, como já foi dito antes, há um distanciamento entre esses discursos, justamente no modo como progridem, pois, enquanto o discurso dedutivo move-se por substituição, "numa argumentação, não se substituem sucessivamente até o momento onde obtém-se o enunciado resultante, como em um cálculo, e sim agrupam-se uns aos outros como em um texto." (DUVAL; EGRET, 1989, p. 29).

Quando estamos buscando argumentar em favor de algo, os enunciados utilizados não são substituídos uns pelos outros como ocorre em uma demonstração, e sim são agrupados segundo a sua pertinência. Há assim um encadeamento de enunciados em favor do que se está querendo mostrar.

Isso marca também mais uma diferença entre a demonstração e argumentação, pois, como destaca Duval (1993, p. 42, grifo do autor), "para que um raciocínio passe a ser uma demonstração, é necessário que ele seja um *raciocínio válido*. A argumentação, ao contrário, é um raciocínio que, de modo geral, não obedece à restrições de validade, mas a restrições de pertinência". O único objetivo de uma demonstração é estabelecer a verdade da proposição. A argumentação não está presa a isso, ela aceita contestação, dúvida, negação, dependendo da força dos argumentos empregados.

Sendo assim, no discurso argumentativo, aparecem frequentemente conectores do tipo: mas, se bem que, contudo, já que, entretanto etc., os quais são classificados por Duval (1993) como conectores argumentativos. Eles são identificados pelo autor como "marcas" do discurso argumentativo, pois tentam exprimir a relação dada pelo argumentador para relacionar duas proposições, sendo que tal relação pode ser uma explicação, uma consequência, um reforço, uma oposição ou até mesmo uma exemplificação, entre outros.

Em contrapartida, o discurso dedutivo tem como marca (os textos acadêmicos que apresentam demonstrações estabelecem essa marca) utilizar-se dos conectores combinatórios e lógicos (se, ... então; ou; e) e dos conectores organizacionais (por consequência; portanto; etc.). O que é identificado, no entanto, é a utilização de conectores nesse tipo de discurso com intuito, como chamado por Duval e Egret (1989), de atitudes proposicionais. Para os autores, "a tomada de consciência do que é uma demonstração e sua expressão não ocorrem a partir de um emprego correto dos conectores lógicos, mas na explicitação de atitudes proposicionais" (p. 32).

Assim sendo, mesmo não se utilizando de conectores lógicos na íntegra, como encontramos facilmente nos textos acadêmicos que apresentam demonstrações, os autores identificam o emprego de outros termos que marcam o estatuto atribuído às proposições. Assim, segundo os autores, os alunos frequentemente utilizam-se de expressões como: "sabe-se que ...", "utilizando-se de ..." "graças ao ...", para fazer relação a uma hipótese; "eu tenho certeza que ...", "pelo teorema ...", para fazer relação a proposições anteriormente conhecidas, assim como se utilizam de expressões como: "portanto eu posso dizer ...", "então, eu concluo que ...", "eu deduzo que ..." para fazer a relação da conclusão com a tese que se queria provar.

O que se observa é que há intenções diferentes com o emprego dessas expressões se comparadas com as expressões argumentativas (conectores dados no discurso argumentativo). Aqui eles (conectores) não fazem menção ao conteúdo da proposição e sim ao estatuto aferido a ela. Como destaca Duval (1991, p. 236), "em um passo de dedução, os conectores expressam outra função além da operatória: eles marcam exclusivamente o estatuto operatório das proposições que eles introduzem".

Contudo, Duval chama a atenção para o fato de que essa separação entre os usos de um tipo de conectores em cada discurso não é uma regra, pois se encontram conectores de todos os tipos no discurso argumentativo. Isso quer dizer que eles têm valores diferentes em cada tipo de discurso, como destaca Duval (2011):

> Não só os conectores lógicos não cumprem a mesma função discursiva em uma demonstração e em uma argumentação, mas o recurso aos conectores necessários em uma argumentação é inútil em uma demonstração matemática, mesmo feita em língua natural. (p. 81).

No entanto, os conectivos "se ... então ... ", segundo Duval e Egret (1993), marcam sempre uma operação de separação muito importante em uma proposição: o "então" marca o que queremos concluir, ou seja, o enunciado ao qual buscamos o valor de verdade na demonstração, enquanto que o "se" marca o que temos que satisfazer para chegar ao valor de verdade sobre o que queremos concluir. "Esta operação de separação não se encontra em nenhuma outra forma de prática discursiva, incluindo a argumentação." (DUVAL e EGRET, 1993 p. 121).

Outro fato importante a se destacar no discurso argumentativo é "que uma argumentação não funciona por *modus ponens*[iii] como em um passo de raciocínio dedutivo." (DUVAL e EGRET 1993, p. 120). Isso quer dizer que, no discurso natural praticado no cotidiano, o valor de verdade atribuído por um estatuto operatório não implica na verdade de uma conclusão. Aqui entra em questão a diferença entre o válido e o verdadeiro, segundo Egret (1998); ou verdade e validade, segundo Fossa (2009), contrastando com os objetivos de cada discurso. A esse respeito, Fossa (2009) pontua que:

> Observamos que, quando falamos de premissas ou de conclusões, dizemos que são 'verdadeiras' ou 'falsas', em contraste, quando falamos de argumentos, demonstrações ou inferências, dizemos que são 'válidos' ou 'inválidos'. Esta é uma distinção muito útil. (FOSSA, 2009, p. 71).

Assim verdadeiro ou falso é usado para as proposições, enquanto válido ou inválido é aplicado no raciocínio empregado para chegar à verdade ou falsidade das proposições. Contudo, em Matemática, o que garante a validade desse raciocínio (argumento) é justamente a verdade das proposições tidas como premissas, pois matematicamente "um argumento é válido se, e somente se, seria impossível para sua conclusão ser falsa se todas as suas premissas fossem verdadeiras." (FOSSA, 2009, p. 73).

Com relação a essas diferenças, frente ao processo de aprendizagem, Egret (1998, p. 75) esclarece que "a noção de validade de um raciocínio tem que ser particularmente bem compreendida: passar dos dados à conclusão pode ser feito apenas se as condições de aplicação da regra geral são cumpridas." Contudo, a validade do raciocínio não garante a verdade de uma proposição no que tange à compreensão cotidiana da mesma.

Vamos adaptar o exemplo dado por Egret (1998) para ilustrar isso. Quando afirmamos: Porto Alegre está localizada no Paraná e Paulo mora em Porto Alegre, conclui-se que Paulo mora no Paraná. Aqui a conclusão é falsa se comparada com o conhecimento real de Geografia, entretanto o raciocínio empregado não deixa de ser válido por esse motivo.

Como vemos, na dedução, o valor de verdade da tese (conclusão) é passado pelo valor de verdade das premissas, bem como pela validade do argumento, contrapondo-se, como vimos anteriormente, ao discurso argumentativo, que se apega ao valor de pertinência.

Frente a tudo que foi exposto até o momento, destacamos, seguindo Duval e Egret (1989, p. 36) que "a aprendizagem da demonstração consiste primeiramente na conscientização de que se trata de um discurso diferente deste que é espontâneo e praticado pelo pensamento natural." Em uma dedução, estamos longe do discurso argumentativo, o qual é a forma de raciocínio mais próxima da praticada no cotidiano. É necessário destacar que os autores apontam caminhos para contornar o problema da compreensão de uma demonstração, a saber:

> A tomada de consciência do que é uma demonstração pode se fazer apenas na articulação de dois registros, em que um é a utilização que cada aluno faz da língua natural. A tomada de consciência nasce da interação que se produz entre a representação não discursiva produzida e os discursos expressos. (DUVAL e EGRET, 1989, p. 37).

Especialmente em Geometria, um dos focos deste artigo, levando em consideração a citação acima, observa se destacar a necessidade do trabalho com as figuras geométricas e a articulação das representações figurais com o registro em língua materna.

A partir do fato de que os discursos argumentativos e dedutivos são diferentes, como foi observado acima, Duval (1993) considera o discurso argumentativo mais complexo que o dedutivo e defende a posição de que não é possível passar do discurso argumentativo para o dedutivo simplesmente por evolução, contudo, "isso não significa que a argumentação não tem espaço no ensino da Matemática." (DUVAL, 1993, p. 60), suas particularidades no ensino são igualmente importantes.

Antes de encerrar esta seção, julgamos pertinente sintetizar em um quadro as principais marcas entre argumentação e dedução (demonstração) até aqui apresentadas.

Quadro 1 - Principais diferenças entre o discurso argumentativo e o dedutivo

	Argumentação	**Demonstração (Dedução)**
Progressão do discurso	Ocorre por acumulação; as proposições agregam-se, ou conectam-se umas às outras.	Ocorre por substituição, em que novas proposições substituem as anteriores, muito próximo ao que ocorre em um cálculo matemático.
O papel das proposições dentro do discurso	As proposições, dentro do discurso, têm um papel muito dependente de seu conteúdo.	Cada proposição tem um papel que independe do conteúdo, mas depende do quadro teórico e da situação, podendo mudar: uma proposição para um dado teorema pode ser assumida como hipótese, ou passar a ser aceita como uma proposição demonstrada.
Progressão do discurso internamente na passagem de uma proposição para outra	Dependente do valor de pertinência, usam-se regras implícitas; operam-se mudanças levando em consideração o conteúdo de cada proposição.	Dependem do valor de verdade. Usam-se regras explícitas; nas passagens, não se leva em conta o conteúdo ou o significado, mas sim o estatuto que lhe é designado (hipótese, teorema, tese etc.).
O papel dos conectores na ligação das proposições	São advindos da língua natural. Têm a função de estabelecer uma relação entre as proposições; essa relação pode ser de oposição, confirmação, justificação, reforço, exemplificação, comparação etc.	Também são normalmente advindos da língua natural. Não são empregados em relação aos conteúdos das proposições, mas sim fazendo relação ao estatuto delegado à proposição. Os conectores lógicos frequentemente encontrados nas demonstrações matemáticas podem ser subentendidos por outras expressões, contudo marcadas por atitudes proposicionais.

Fonte: Autores

O presente quadro se torna importante para a análise dos discursos produzidos pelos professores frente à construção de propostas didáticas para trabalhar com proposições previamente selecionadas na Educação Básica, as quais apresentaremos em seção posterior.

Aspectos metodológicos utilizados na pesquisa

Como metodologia para produção, coleta e análise dos dados, adotamos uma metodologia qualitativa descritiva de investigação em que buscamos uma aproximação com a Engenharia Didática de Artigue (1996). Trata-se de aproximação, pois, mesmo reconhecendo as fases que compõem a Engenharia Didática, para a presente pesquisa algumas dessas fases foram estruturadas com alterações em relação aos pressupostos adotados originalmente por esta metodologia de pesquisa, sendo que o detalhamento das diferenças pode ser observado em Trevisan (2016).

A produção dos dados aqui apresentados se deu no ambiente de um curso de extensão ofertado a um grupo de doze professores de Matemática, todos atuantes na rede pública estadual de ensino no estado de Mato Grosso, no município de Sinop. Os dados foram produzidos por meio da aplicação de um conjunto de nove atividades envolvendo conceitos geométricos, as quais foram previamente selecionadas e visavam à produção de propostas de trabalho para explorar provas empíricas e teóricas. Pela limitação de espaço não vamos apresentar as análises das nove atividades realizadas, mas escolhemos algumas delas para serem aqui apresentadas com mais detalhes. Para isso adotamos como critério trabalhar com as atividades que apresentavam uma representação figural no enunciado.

Destacamos também que as produções foram realizadas em trios pelos professores, os quais aparecem aqui indicados por um nome fictício com duas letras e um número (exemplo: P3B): o número indica o trio pertencente (trio 3, no exemplo dado), a letra P faz menção à palavra Professor e a última letra é aleatória ("B", no exemplo dado), permitindo a identificação do professor por parte do autor.

Cada atividade visa explorar uma propriedade geométrica, cuja demonstração poderia ser feita utilizando os casos de congruência de triângulos. Diante de cada atividade, os professores foram convidados a elaborar uma solução empírica e uma solução teórica para a mesma. Também era solicitado que indicassem se seria possível trabalhar com a atividade em sala de aula, apontando possíveis limitações para seu efetivo trabalho.

Todo material produzido por eles em cada atividade era recolhido. Também, ao término de cada atividade, cada trio explicava o que e como havia feito. Estas explicações foram gravadas em áudio e vídeo e, juntamente com o material escrito produzido, se constituíram em dados que foram analisados.

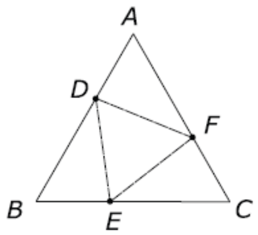
O assunto trazido para discussão no presente artigo diz respeito aos discursos utilizados na elaboração destas validações, segundo os aportes teóricos apresentados na seção anterior, e são apresentados na próxima seção.

Análise e resultados: em questão os tipos de discursos elaborados

No contexto das validações teóricas produzidas e apresentadas pelos professores, apesar dos equívocos encontrados em algumas, percebe-se claramente a intenção de emprego de um discurso próprio, o qual na maioria das vezes tende a se aproximar do discurso dedutivo que caracterizamos. Pudemos evidenciar tal fato em várias validações apresentadas, por exemplo, diante da atividade 1, a qual solicitava:

Quadro 2 – Primeira atividade explorada no curso de extensão proposto aos professores

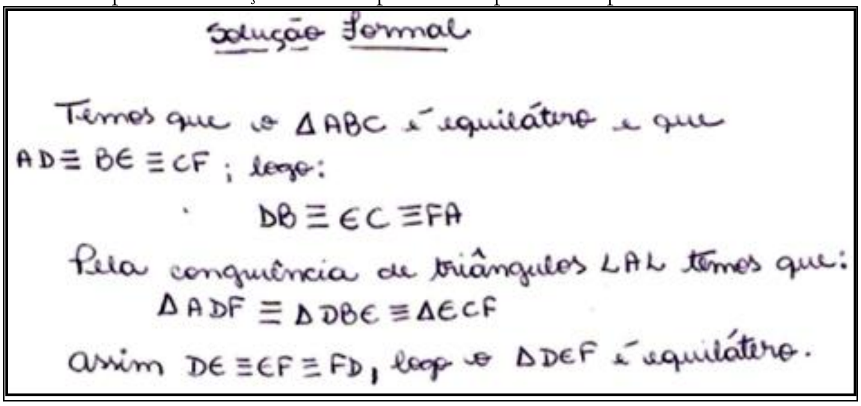
Atividade 1 - Na figura abaixo, ABC é um triângulo equilátero. Sejam os pontos D, E e F sobre os lados desse triângulo tal que: $AD \equiv BE \equiv CF$, podemos garantir que o triângulo DEF é classificado como equilátero, escaleno ou isósceles? Como fazer isso?



Fonte: Elaborada pelos autores para curso de extensão.

Na Figura 1, apresentamos o material produzido pelo trio 01 como solução formal para esta atividade.

Figura 1 - Proposta de solução teórica apresentada pelo trio 1 para a atividade 1


Solução Formal

Temos que o ΔABC é equilátero e que
AD≡ BE ≡CF ; logo:
DB ≡ EC ≡FA
Pela conguência de triângulos LAL temos que:
ΔADF ≡ ΔDBE ≡ΔECF
assim DE ≡EF ≡ FD, logo o ΔDEF é equilátero.

Fonte: Material produzido pelo trio 1

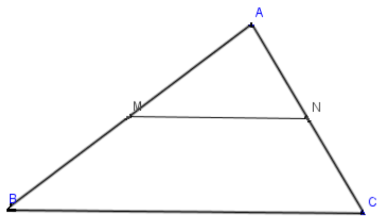
Como relação aos elementos de discurso utilizados, na primeira linha, os termos, "Temos que ..." e "e que ..." marcam a entrada de elementos conhecidos, nesse caso dados como hipótese no enunciado da atividade. O termo "logo", na segunda linha, marca uma conclusão obtida desses dois fatos. Esses elementos, como observamos anteriormente, são marcas do discurso dedutivo, mesmo não sendo explicitado como os fatos anteriores, permitiram essa conclusão na demonstração.

Percebe-se uma falta de clareza ao utilizar o critério de congruência Lado-Ângulo-Lado, apesar de ter sido utilizado corretamente, porém sem evidenciar as relações correspondentes de congruência entre os elementos, bem como a justificativa dos ângulos serem iguais (consequência de o triângulo ABC ser equilátero dado na hipótese), que foi omitida na demonstração apresentada. No entanto, a ausência destas passagens não descaracteriza a clara intenção de emprego de um discurso próprio, o qual identificamos como dedutivo.

Além disso, até mesmo as provas teóricas produzidas com erros nos remetem à tentativa de emprego desse tipo de discurso, conforme ilustramos com a prova apresentada pelo trio 1 para a atividade 3. O enunciado dessa atividade era o seguinte:

Quadro 3 – Terceira atividade explorada no curso de extensão proposto aos professores

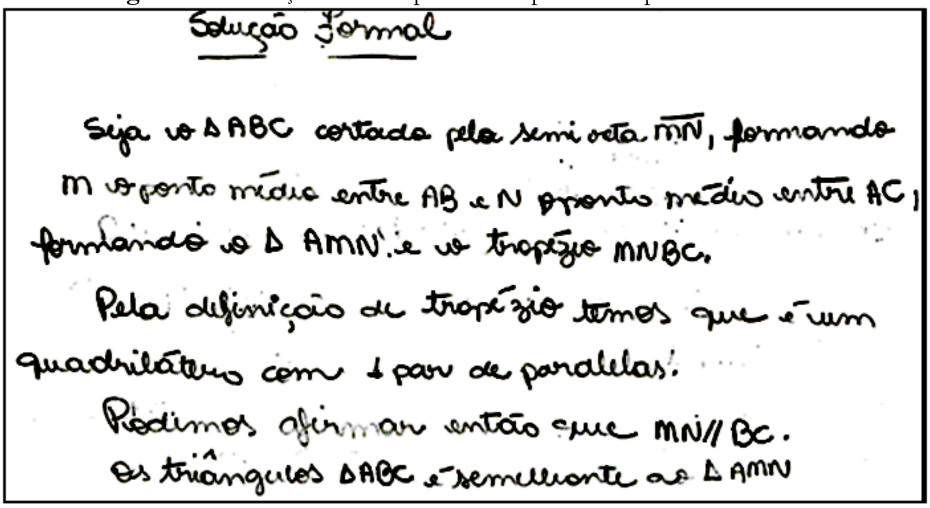
Atividade 3 - Na figura abaixo, considere ABC um triângulo qualquer em que M é ponto médio de AB e N é ponto médio de AC. Nessa situação, o que é possível afirmar sobre MN em relação a BC?



Fonte: Elaborada pelos autores para curso de extensão.

Nesta atividade, é explorado o conhecido teorema da base média de um triângulo. Na Figura 2 apresentamos a validação formal entregue pelo trio 1.

Figura 2 - Validação teórica apresentada pelo trio 1 para a atividade 3



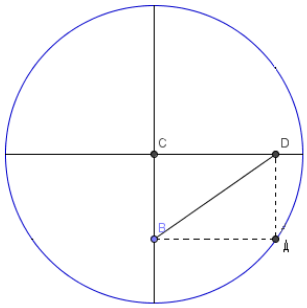
Fonte: Material produzido pelo trio 1

Observando a validação apresentada, vemos que a primeira parte da prova descreve a figura que acompanha o enunciado da atividade, dando elementos a mais do que está presente, como a existência de um trapézio MNBC. A conclusão de o quadrilátero MNBC ser um trapézio é atribuída pelo grupo, por uma impressão visual sobre a figura. Esta afirmação é feita para poder usar este fato na sequência, visando concluir, pela propriedade dada aos trapézios pelo trio, que os segmentos MN e BC seriam paralelos.

Como vemos, é o estatuto de verdade atribuído à definição de trapézio que garante a verdade do paralelismo entre os segmentos em questão. Esta também é uma marca típica do discurso dedutivo. Esse estatuto de verdade atribuído a elementos matemáticos também se fez presente em algumas exposições orais durante a realização das atividades, como na atividade 5, apresentada no Quadro 4.

Quadro 4 – Quinta atividade explorada no curso de extensão proposto aos professores

Atividade 5 - Na figura a seguir, temos um círculo de raio conhecido e um retângulo ABCD. Nessas condições, o que podemos afirmar sobre a medida do segmento BD?

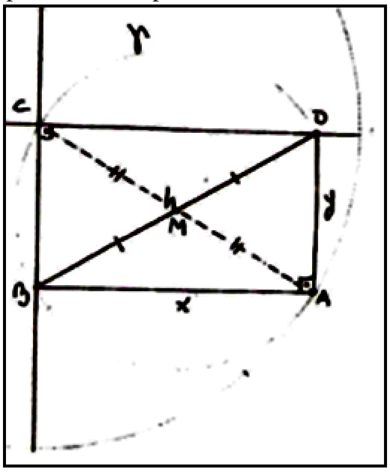


Fonte: Elaborada pelos autores para curso de extensão.

Vejamos no diálogo a seguir o que é apresentado pelo trio 3 sobre esta atividade:

> **Autor:** Então, o que descobriram?
> **PM3:** É a mesma medida do raio.
> **Autor:** Por que você acha isso?
> **PM3:** Porque, olha só: essa medida aqui é X [CD] e essa daqui é Y [CB], certo? Pelo teorema de Pitágoras, a minha hipotenusa, eu vou dizer que é M, ela vai ter essa medida... [anotando ao lado da figura] M é igual à raiz quadrada de X ao quadrado mais Y ao quadrado. Ora, então, analogamente para esse triângulo aqui, cuja CA [já havia adicionado o segmento CA obtendo o triângulo CAB] é o raio da circunferência, ele é a mesma medida de M. Por quê? Porque ele vai cair justamente que M e CA são quem? Raiz quadrada de X ao quadrado mais Y ao quadrado [mostrando que M e CA têm a mesma medida].
> (Fragmento de diálogo gravado em vídeo sobre a atividade 5, realizada pelo trio 3)

Figura 3 - Figura utilizada para ilustrar a prova teórica da atividade 5 pelo trio 3



Fonte: Material produzido pelo trio 3

Na explicação apresentada, o Teorema de Pitágoras é utilizado como estatuto de verdade, o qual permite que se realize a substituição dos segmentos CA e BD pelo equivalente dado pelo teorema de Pitágoras a partir do tratamento algébrico: $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Fato a ser destacado também é que as provas teóricas entregues pelos trios, em sua maioria, não continham uma representação figural para dar suporte à validação. Em geral, eles se utilizavam de tal representação para a produção da prova, fosse a que acompanhava o enunciado, quando ele já continha, fosse um rascunho não entregue na versão final ou a própria construção empírica. Destacamos este fato por ele também ser um elemento que remete ao discurso dedutivo, que busca se sustentar na apresentação em linguagem natural.

Esses elementos apresentados evidenciam que, de forma geral, na construção de uma validação teórica por parte dos professores, foi sempre empregada uma tentativa de uso de um discurso próprio, o qual traz marcas do discurso dedutivo, mesmo naquelas que continham equívocos e não podiam ser caracterizadas como demonstrações.

O que isto nos indica é que, quando o sujeito se põe a produzir uma prova teórica, ele apresenta, de modo consciente, a necessidade de esta ser produzida sobre um discurso específico, no caso o discurso dedutivo. Isso se torna importante, pois para Duval e Egret (1989):

> A aprendizagem da demonstração necessita primeiro de uma tomada de consciência de que o funcionamento deste discurso é diferente do espontâneo praticado pelo pensamento natural. Em particular o que o matemático chama de 'dedução' é, do ponto de vista cognitivo, uma substituição de enunciados efetuados primeiro em função de seu estatuto (p. 36).

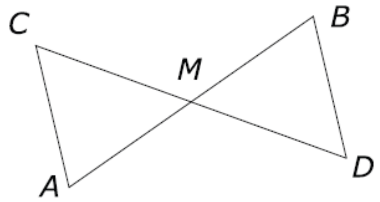
Nesse caso, como observamos na citação, do ponto de vista cognitivo, é fundamental que o aluno tenha consciência de que o discurso empregado nas demonstrações se trata de um discurso próprio, com uma estrutura diferente da praticada na argumentação cotidiana. Para que o aluno se aproxime dessa constatação e reconheça a existência dessas particularidades neste tipo de discurso, é fundamental que o professor também as conceba e as expresse.

Nesse sentido, o cenário encontrado nas validações teóricas produzidas pelos professores foi favorável, pois é perceptível nas produções a intenção de utilização dessa forma de discurso próprio. No entanto, as provas empíricas produzidas e propostas pelos professores não indicam uma aproximação com o discurso dedutivo, ficando mais próximas à utilização de uma argumentação cotidiana do que de uma argumentação própria da Matemática. A maioria das atividades elaboradas por eles se baseava na manipulação figural, na qual o valor de verdade era atribuído pela comparação de igualdade advinda dessa manipulação.

Exemplo disto é a produção do trio 3 para a atividade 7 apresentada no Quadro 5.

Quadro 5 – Sétima atividade explorada no curso de extensão proposto aos professores

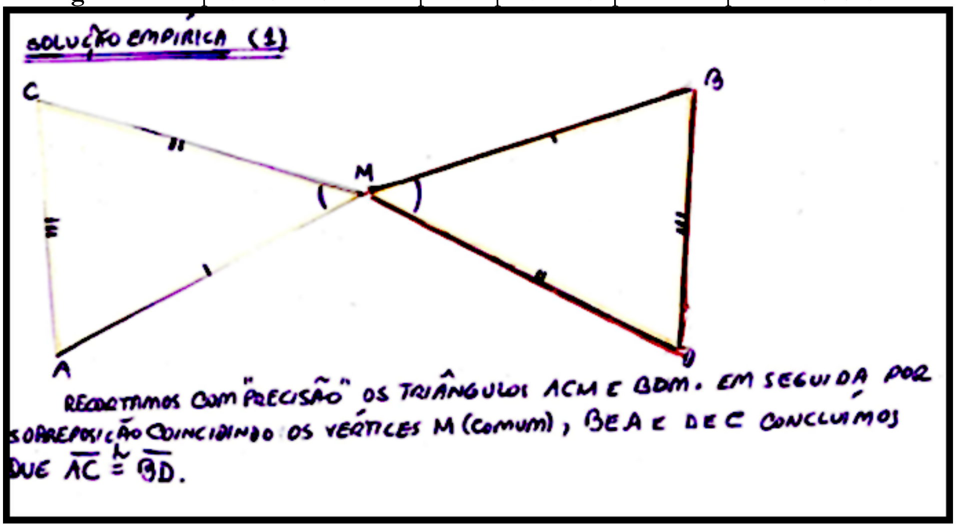
Atividade 7 - Na figura, dois segmentos AB e CD se interceptam no ponto M tal que: CM ≡ MD e AM ≡ MB. O que podemos afirmar sobre os segmentos AC e DB que ligam as extremidades dos segmentos AB e CD?



Fonte: Elaborada pelos autores para curso de extensão.

O trio 3 apresentou como solução empírica a seguinte proposta exposta na Figura 4:

Figura 4 - Proposta de trabalho empírico apresentada pelo trio 3 para a atividade 7



Fonte: Material produzido pelo trio 3

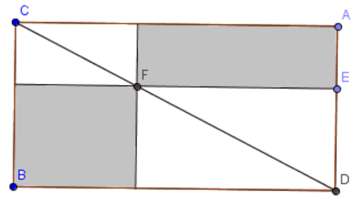
Nesta proposta, o aluno conclui que AC e BD são iguais pela sobreposição dos triângulos, o que levaria os segmentos AC e BD a coincidirem a partir do movimento de sobrepor os triângulos. É este fato que atribui o valor de verdade à conclusão. Não são trabalhados elementos teóricos matemáticos, como, por exemplo, os casos de congruência de triângulo. Apesar da indicação de congruência entre os lados se fazer presente na representação geométrica apresentada, não é feita menção a este fato na proposta, mesmo sendo esta uma das formas de se realizar a prova teórica da igualdade.

Outra particularidade destas propostas didáticas, envolvendo provas empíricas que foram produzidas e necessitam ser destacadas, diz respeito ao fato de elas, em geral, se limitarem a apenas uma das possíveis funções delegadas às provas por Villiers (2001), a saber: a função de verificação. As manipulações propostas, sobrepondo as figuras, comparando os segmentos, comparando as figuras, medindo as figuras, calculando suas áreas, entre outras utilizadas nas validações empíricas, visam, quando muito, verificar a propriedade em destaque na atividade.

Mas não entra em questão a principal função atribuída às provas por este mesmo autor, a saber: a de explicar ou justificar uma dada propriedade. Vejamos, com mais detalhes, como a construção realizada pelo trio 3 (Figura 5), para utilização na validação empírica da atividade 4, apresentada no Quadro 6, ilustra o que estamos dizendo.

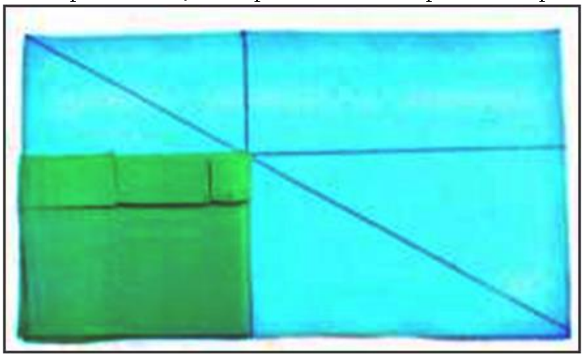
Quadro 6 – Quarta atividade explorada no curso de extensão proposto aos professores

Atividade 4 - Na figura abaixo, por um ponto na diagonal foram traçados dois segmentos de reta paralelos aos lados de um retângulo. O que é possível afirmar sobre as áreas dos retângulos hachurados na figura?



Fonte: Elaborada pelos autores para curso de extensão.

Figura 5 - Material para validação empírica elaborado pelo trio 3 para a atividade 4



Fonte: Material entregue pelo trio 3

Com o material produzido pelo trio 3, apresentado na Figura 5, a ideia do trio é que os alunos manipulem, como um quebra-cabeça, formas para recobrir os retângulos maiores com os menores em verde. Recobrindo corretamente os dois retângulos, o aluno pode até se convencer de que as áreas são iguais, mas isso não explica, não elucida o motivo de as regiões terem a mesma área. É uma prova teórica que contém elementos matemáticos, como a congruência de triângulos, as propriedades dos retângulos, entre outros, que pode explicar o porquê dessa equivalência de áreas.

Desponta assim a necessidade de se buscar um trabalho conjunto entre as provas empíricas e as teóricas, contudo o que temos encontrado em cenário de pesquisa análogo, conforme apresentado em Trevisan e Freitas (2017), é contrário, como é posto:

> A prática encontrada, ao olharmos as produções de propostas para trabalhar com validações empíricas e teóricas, infelizmente não visa aproximar as práticas empiristas experimentais das argumentativas dedutivas, valorizando apenas o primeiro extremo desta relação geralmente apoiadas em elementos superficiais que não se sustentam na prática (Trevisan e Freitas, 2017, p. 24).

De nada adianta o reconhecimento de uma estrutura própria nas produções de provas teóricas se, no momento de efetivar as ações de ensino, apenas uma das categorias ganha destaque e se for trabalhado apenas o convencimento empírico.

Conclusões

A construção de provas matemáticas ou a demonstração (lembrando que há pesquisadores da área da Educação Matemática que costumam fazer distinção entre esses dois termos como Balacheff (1988) e Pietropaolo (2009), das quais também compartilhamos), sem dúvida, integram a base da matemática. Sabendo que a elaboração das demonstrações por parte desta área se apoia no raciocínio dedutivo, é importante reconhecer as especificidades inerentes a este tipo de discurso. Mesmo que o interesse não seja a produção de matemática, mas sim o seu ensino, a construção e o emprego de tal raciocínio também perpassam esse cenário.

Raymond Duval e Marie-Agnès Egret, em suas pesquisas, ao teorizarem sobre os aspectos cognitivos envolvidos nos discursos dedutivos e argumentativos, explicitam que o reconhecimento das diferenças existentes entre estes é fundamental para a aprendizagem matemática.

Neste aspecto a pesquisa realizada se mostrou satisfatória, pois nas análises apresentadas foi possível claramente percebermos a tentativa de adoção de um discurso dedutivo ao se buscar produzir provas categorizadas como teóricas, ou seja, provas que buscavam envolver elementos teóricos matemáticos. Em sentido contrário, a explícita tendência de valorização, muitas vezes encontrada, de trabalho com as provas empíricas acabam por diminuir a importância do reconhecimento da estrutura discursiva para a aprendizagem da matemática.

O trabalho empírico experimental não pode se limitar à constatação, e ser o elemento central na construção da matemática em sala de aula, mas deve servir para levantar conjecturas, provocar a dúvida e o desejo de investigações, e assim a produção de provas (ou demonstrações), ou seja, ser o caminho de entrada na busca da utilização de discursos matemáticos dedutivos de validação.

Assim, acreditamos que o ensino de Matemática, especialmente de geometria, quando busca explorar a produção de validações, não deve ser centrado nas demonstrações formais, como já ocorreu em outros tempos. Também não deve ser explorada apenas a partir de uma abordagem empírica, pautada em tentativa e em erro, experimentação e simples comparação, sem uma articulação teórica que explore propriedades e conceitos matemáticos, que vemos muitas vezes ocorrer. O desafio é tentar buscar um equilíbrio entre os elementos empíricos e teóricos. Atingir este equilíbrio implica em trabalhar de modo efetivo com as duas classes de discurso aqui exploradas, a dedutiva e a argumentativa, o que pode vir a ser um diferencial para a promoção da aprendizagem matemática.

Referências

ARTIGUE, M. "Engenharia didática". *In*: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. pp. 193-217

BALACHEFF, N. Aspects of Proof in Pupils' Practice of School Mathematics. In: Pimm, D (Ed.) **Mathematics, Teachers and Children**. Hodder & Stoughton. pp. 216-235. London. 1988.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. (5ª e 8ª séries). Brasília, DF, 1998.

DUVAL, R.; EGRET M. A. Introduction a la demonstration et apprentissage du raisonnement deductif. **REPERES** – Irem de Strasburg, n. 12, pp. 114-140 – juillet, 1993.

DUVAL, R.; EGRET M. A. L'organisation deductive du discours: interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la demonstration. **Annales** de Didactique et de Sciences Cognitives, pp. 25-40. IREM de Strasburg, 1989.

DUVAL, R. Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? **Petit x**, n. 31. pp. 37-61, 1993.

DUVAL, R. Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática**. (Entrevista realizada por José Luiz Magalhães de Freitas e Veridiana Resende) n.2, n.3 jul-dez. Campo Mourão, PR, 2013.

DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática**. v. 6, n.2, Tradução: Méricles Thadeu Moretti. P. 96-112. Florianópolis, 2011.

DUVAL, R. Structure du raisonnement deductif et apprentissage de La demonstration. **Educational Studies in Matematics**, n. 22, pp. 233-261, 1991.

EGRET, M. A.; *et al.* Un travail interdisciplinaire en français et mathématiques. IREM de Strasbourgs, L'Ouvert 92, pp. 25-32, 1998. *In*: **Marie-Agnès Egret et l'enseignement des mathématiques**. Nicole Bopp (Dir.) IREM de Strasbourg, 2013.

FOSSA, J. A. **Introdução às técnicas de demonstração na Matemática**. 2. ed. Editora Livraria da Física. São Paulo: 2009.

PIETROPAOLO, R. C. Demonstrações e Provas e Educação Matemática – uma análise de pesquisas existente. In: MARANHÃO, C. (org). **Educação Matemática nos anos finais do ensino fundamental e ensino médio**: pesquisas e perspectivas. São Paulo: Editora Musa, 2009.

TREVISAN, E. P. **Um estudo sobre a articulação entre validações empíricas e teóricas no ensino de Geometria com professores da rede pública**. 2016. 257 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso, 2016.

TREVISAN, E. P.; FREITAS, J. L. M. A valorização de validações empíricas em atividades geométricas: um reflexo do cenário desenhado para o ensino de geometria. **Revista Educação Matemática em Foco**, v. 6, n. 1, jan-jun, pp. 1-29, 2017.

VILLIERS, M. D. de. Papel e funções da demonstração no trabalho com *Sketchpad*. **Revista Educação e Matemática**, n. 62, p. 31-37. mar.-abr. 2001.

---

[i] Sigla abreviada da expressão original em francês: *Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques*.

[ii] Nota da própria obra: Nível de ensino francês correspondente aos anos finais do Ensino Fundamental brasileiro.

[iii] Lembrando que *modus ponens* é o nome latino referente ao que se afirma afirmando, esquematicamente representado em lógica formal por:

$A \rightarrow B$
AA A
Portanto, B.

Nesse caso (AA), refere-se à afirmação do antecedente, (A) e (B) são proposições.