RECM
REVISTA DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

COORDENAÇÃO DOS REGISTROS ALGÉBRICO E GRÁFICO NA CLASSIFICAÇÃO E DISCUSSÃO DE SISTEMAS LINEARES 3 X 3 NO ENSINO MÉDIO

COORDINATION OF THE ALGEBRAIC REGISTERS AND CARTESIAN GRAPHS IN THE DISCUSSION AND CLASSIFICATION OF LINEAR SYSTEMS 3 X 3 IN HIGH SCHOOL

Eduardo Brandl[1]
Viviane Clotilde da Silva[2]

Resumo

Este artigo apresenta reflexões sobre a importância do estudo de várias representações do objeto matemático Sistemas Lineares para o seu entendimento pelos estudantes e baseia-se na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval, que afirma ser necessário o acesso e a coordenação de, pelo menos, duas diferentes representações de um mesmo objeto matemático para a compreensão do mesmo. Procura-se trazer argumentos que justifiquem este posicionamento a luz desta teoria e se apresenta atividades, buscando explorar as representações gráfica e algébrica de Sistemas Lineares 3 x 3. Neste contexto, o uso do software GeoGebra auxiliou na construção e visualização dos planos formados. A pesquisa foi desenvolvida com estudantes do 2º ano do Curso Técnico em Vestuário Integrado ao Ensino Médio e os dados foram coletados por meio de análise das atividades, gravação de áudios e observações. Constatou-se que esta metodologia possibilitou um progresso significativo na compreensão do objeto matemático Sistemas Lineares.

Palavras-chave: Sistemas Lineares. Ensino Médio. Registros de Representação Semiótica. GeoGebra. Compreensão.

Abstract

This article presents reflections on the importance of the study of several representations of the mathematical object Linear Systems for their understanding by the students. It is based on Duval's Theory of Semiotic Representation Registers, whose foundation is that access and coordination in at least two different representations of the same mathematical object are necessary to understand it. It is tried to bring arguments that justify this positioning in the light of this theory and presents activities, seeking to explore the graphic and algebraic representations of 3 x 3 Linear Systems. In this context the use of GeoGebra software assisted in the construction and visualization of the formed plans. The research was developed with students of the 2nd year of the Technical Course in Clothing Integrated to High School and the data were collected through activity analysis, audio recording and observations. It was verified that this methodology made possible a significant progress in the understanding of the mathematical object Linear Systems.

Keywords: Linear Systems. High School. Registers of Semiotic Representation. GeoGebra. Understanding.

[1] Instituto Federal Catarinense
[2] Universidade Regional de Blumenau - FURB

Introdução

Muitas pesquisas apresentam as dificuldades dos estudantes na aprendizagem do objeto matemático Sistemas Lineares, seja no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio. Dentre estes pesquisadores encontram-se Battaglioli (2008) e Freitas (2013) que, em seus estudos verificaram que uma das causas para esta dificuldade se deve ao fato de grande parte dos estudantes resolverem os Sistemas Lineares de modo mecânico, ou seja, apenas repetirem os passos de um determinado método e, ao chegarem ao final da resolução, não compreenderem o significado da solução. Segundo estes autores, os estudantes não possuem ferramentas cognitivas que os auxiliem a verificar se as soluções encontradas estão corretas, resultado da não compreensão do significado dos valores encontrados.

A não compreensão da resolução e do significado da solução obtida pode ser em parte, resultado de uma abordagem predominantemente algébrica que ocorre ao se trabalhar os Sistemas Lineares no Ensino Médio (BATTAGLIOLI, 2008; FREITAS, 2013; BRASIL, 2014).

Nesse sentido a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval traz importantes contribuições ao considerar que o acesso aos objetos matemáticos ocorre por meio das suas diferentes representações, uma vez que, segundo esta teoria, cada uma destas representações é parcial em relação ao objeto, necessitando o trânsito e a coordenação entre os diferentes registros para que aconteça a apreensão conceitual: esta é a hipótese fundamental da Teoria de Registros de Representação Semiótica.

Diante deste contexto, este artigo tem como objetivo analisar as contribuições da Teoria de Duval na classificação e discussão de Sistemas Lineares 3 x 3, por meio de atividades que visem a coordenação entre os registros algébrico e gráfico. Para o alcance deste objetivo, na sequência se apresenta resumidamente a Teoria de Registros de Representação Semiótica, e se analisa algumas atividades desenvolvidas com estudantes do 2º ano do Ensino Médio para verificar as contribuições desta teoria no entendimento das relações entre os registros gráfico e algébrico, dos vários tipos de Sistemas Lineares 3 x 3.

Os dados da pesquisa foram coletados por meio da observação sistemática do desenvolvimento das atividades propostas, da análise das produções dos estudantes e das gravações em áudio. Os critérios de análise foram previamente definidos considerando os tratamentos, as conversões e a coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica propostos pela Teoria de Duval.

Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval

Semiótica "de origem grega (semeion = signos), denomina-se como a ciência dos signos e os signos aqui mencionados referem-se à linguagem. Assim, semiótica pode ser compreendida como sendo a ciência de todas as linguagens" (QUEIROZ, RAMOS e SIPLE, 2011, p. 18).

De acordo com Duval (2011), outros povos e pensadores já haviam estudado os signos, mas foi a partir de três pesquisadores Saussure, Pierce e Frege que houve o estudo sistemático dando origem aos três modelos de análise que fundamentaram a Semiótica. Apesar disso, Duval concluiu que nenhum destes três modelos era realmente utilizável na análise da complexidade da aprendizagem matemática e, por este motivo elaborou a Teoria de Registros de Representação Semiótica.

Para Duval (2009) um sistema semiótico deve permitir três atividades cognitivas: 1) a identificação de signos como a representação de algo; 2) transformar as representações pelas regras do sistema e 3) converter as representações de um sistema em outro. Mas afirma que nem todos os sistemas semióticos permitem isso, como é o caso, por exemplo, do Código Morse.

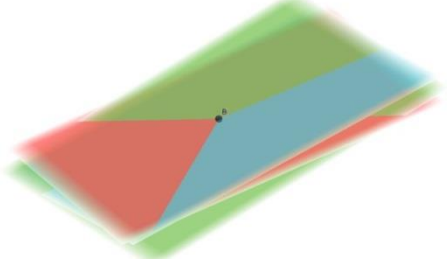
Aos sistemas que possibilitam estas três atividades Duval (2009) denomina de registros de representação semiótica que apresentam três fenômenos estreitamente ligados: 1) diversificação de registros de representação semiótica, 2) diferenciação entre representante (forma) e representado (conteúdo) e 3) coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica.

O fato de o acesso aos objetos matemáticos ocorrer somente por meio de suas representações pode gerar o que Duval descreve como paradoxo cognitivo: como não confundir o objeto e a sua representação se em Matemática o acesso ao primeiro somente é possível através do segundo? A possível resposta a este questionamento reside no fato de que é necessário o acesso a, pelo menos, duas diferentes representações do mesmo objeto matemático para que isso não ocorra.

Como exemplo, cita-se o objeto matemático Sistemas Lineares 3 x 3, representado na forma algébrica e a sua representação gráfica constituída por três planos que podem ou não se intersectar: ambos constituem representações distintas de um mesmo objeto e por isso o representam parcialmente e são complementares. Assim o objeto matemático Sistemas Lineares nunca estará completamente representado através de um único registro.

Duval aponta que na Matemática há uma diversidade de registros de representação e especificamente em relação ao objeto matemático Sistemas Lineares, o Quadro 01 apresenta os registros de representação semiótica que poderão ser mobilizados e coordenados no estudo deste objeto matemático.

Quadro 01 – Tipos de Registros de Representação Semiótica relacionados aos Sistemas Lineares 3 x 3.

<table>
<tr><th colspan="2">Tipo de registro</th><th>Sistemas lineares</th></tr>
<tr><td colspan="2">Língua materna</td><td>Um fabricante de móveis produz cadeiras, mesinhas de centro e mesas de jantar. Cada cadeira leva 10 minutos para ser lixada, 6 minutos para ser tingida e 12 minutos para ser envernizada. Cada mesinha de centro leva 12 minutos para ser lixada, 8 minutos para ser tingida e 12 minutos para ser envernizada. Cada mesa de jantar leva 15 minutos para ser lixada, 12 minutos para ser tingida e 18 minutos para ser envernizada. A bancada para lixar fica disponível 16 horas por semana, a bancada para tingir, 11 horas por semana e a bancada para envernizar, 18 horas por semana. Quantos móveis de cada tipo devem ser fabricados por semana para que as bancadas sejam plenamente utilizadas?</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Algébrico</td><td></td><td>$$\begin{cases} 10x+12y+15z=960 \\ 6x+8y+12z=660 \\ 12x+12y+18z=1080 \end{cases}$$sendo x a quantidade de cadeiras fabricadas, y a quantidade de mesinhas de centro fabricadas e z a de mesas de jantar fabricadas.</td></tr>
<tr><td>Matricial</td><td>$$\begin{bmatrix} 10 & 12 & 15 \\ 6 & 8 & 12 \\ 12 & 12 & 18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 960 \\ 660 \\ 1080 \end{bmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>Tabular</td><td><table>
<tr><td>Móvel / Tempo (min)</td><td>Cadeira</td><td>Mesinha de centro</td><td>Mesa de jantar</td><td>Tempo disponível</td></tr>
<tr><td>Lixar</td><td>10</td><td>12</td><td>15</td><td>960</td></tr>
<tr><td>Tingir</td><td>06</td><td>08</td><td>12</td><td>660</td></tr>
<tr><td>Envernizar</td><td>12</td><td>12</td><td>18</td><td>1080</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td colspan="2">Numérico</td><td>$10 . 30 + 12 . 30 + 15 . 20 = 960$
$6 . 30 + 8 . 30 + 12 . 20 = 660$
$12 . 30 + 12 . 30 + 18 . 20 = 1080$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Simbólico</td><td>Solução do sistema: S= {(30,30,20)}</td></tr>
<tr><td colspan="2">Gráfico</td><td></td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor baseado na classificação de Boemo (2015)

A hipótese fundamental da Teoria de Registros de Representação Semiótica é que a conceituação de um objeto matemático, denominada por Duval de *noésis*, somente ocorre quando se tem acesso aos diferentes registros de representação semiótica deste objeto, considerada por esse mesmo autor como *semiósis*, ou seja, não há *noésis* sem *semiósis*. Dessa forma, é imprescindível que qualquer proposta de ensino de Matemática contenha atividades que contemplem e coordenem os diferentes registros de representação do objeto matemático estudado.

Uma das ideias centrais da teoria de Duval é que ao analisar o funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática se faça a distinção entre as transformações semióticas: tratamentos e conversões, pois segundo ele uma das limitações na proposição de atividades e na análise das produções de estudantes está em não distinguir esses dois tipos de transformação que ocorrem na atividade matemática.

> Um tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza então apenas um registro de representação. A conversão é, ao contrário, uma transformação que faz passar de um registro a um outro. Ela requer então a coordenação dos registros no sujeito que a efetua (DUVAL, 2009, p. 39).

Em suas pesquisas, Duval argumenta e comprova que uma conversão é irredutível a um tratamento. No entanto uma visão superficial de sua teoria, sem a devida compreensão pode provocar o entendimento contrário.

Em relação às conversões, Duval destaca ainda que o custo cognitivo dessa transformação pode ser maior ou menor dependendo do que ele denomina congruência semântica entre duas representações de um mesmo objeto matemático.

Existem conversões congruentes, próximas a uma simples codificação, conversões intermediárias e não congruentes. Duval (2003) aponta que nas conversões congruentes a representação de chegada transparece na representação de partida e está próxima a uma situação de simples codificação, neste caso a passagem de uma representação a outra é mais imediata. Nas conversões não congruentes não há nenhuma transparência e a passagem de uma representação a outra não é imediata.

Salienta-se ainda que o fato de um estudante fazer a conversão em um sentido não implica que ele terá sucesso na conversão de sentido inverso. "Para que haja coordenação sinérgica de vários registros, é preciso ser capaz de converter as representações nos dois sentidos e não em um único" (DUVAL, 2011, p. 118). Esta importante constatação nem sempre é considerada em sala de aula.

Duval questiona ainda a maneira como as atividades matemáticas são apresentadas aos estudantes. Ele é a favor de que se crie situações que explicitem o maior número possível de variações de congruência (e não congruência) de um mesmo objeto matemático em dois registros diferentes, para que os estudantes possam analisar, discutir e tomar consciência (DUVAL, 2011).

Este foi o objetivo traçado para este estudo, ou seja, propor atividades que possibilitem aos alunos compreenderem as relações existentes entre os dois tipos de representações.

Uso de Tecnologias de Informação

Nesse contexto, destaca-se o papel dos *softwares* educativos como auxiliares ao trabalho do professor na articulação entre os diferentes registros de representação dos Sistemas Lineares, especificamente, os sistemas denominados 3 x 3, desde que o professor elabore atividades intencionais que permitam ao estudante transitar entre os diferentes registros e analisar a relação entre eles. Neste trabalho, fez-se a opção pelo *software* GeoGebra, pois é um *software* de livre acesso e possui uma particularidade importante no estudo de sistemas lineares: permite a visualização concomitante do registro algébrico e do gráfico, possibilitando acompanhar e analisar as alterações que podem ser feitas em um dos registros e a implicação dessa modificação no outro tipo de registro.

Além disso, há a necessidade do uso de um *software* para visualizar a representação gráfica dos sistemas 3 x 3, pois sem o seu uso torna-se muito difícil a visualização geométrica no espaço e principalmente a possibilidade de movimentação.

> [...] a coordenação entre representações ressaltando sistemas semióticos diferentes não tem nada de espontâneo. Sua colocação não resulta automaticamente de aprendizagens clássicas muito diretamente centradas sobre conteúdos de ensino (DUVAL, 2009. p. 19).

Cabe destacar ainda que um *software* permite um número maior de experimentos sem, no entanto, anular o esforço da atividade compreensiva por parte do estudante, cabendo ao professor organizar situações que possibilitem a gradativa coordenação entre diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático.

Metodologia e análise das atividades

As atividades apresentadas neste artigo fazem parte de uma pesquisa qualitativa desenvolvida em uma classe de 2º ano de um Curso Técnico em Vestuário Integrado ao Ensino Médio, composta por nove estudantes, que foi aprovada pelo Comitê de Ética de Humanos sob o Parecer de nº 2. 225. 560. Para a coleta de dados todas as aulas foram gravadas em áudio e as produções dos estudantes e/ou duplas, digitalizadas para análise posterior. Fez-se ainda a observação sistemática do desenvolvimento de todas as atividades integrantes da sequência didática, com anotações escritas dos itens pertinentes e necessários à análise.

Na sequência apresenta-se a descrição e a análise de duas atividades desenvolvidas na pesquisa, com base na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval. Estas atividades tiveram como objetivo possibilitar aos estudantes verificarem, gráfica e algebricamente, as relações entre os Sistemas Lineares 3 x 3: Possíveis (SP), Possíveis e Indeterminados (SPI) e Impossíveis (SI). Para isso explorou-se as transformações: conversão, tratamento e a coordenação entre os diferentes registros.

Atividade 01

Usando o GeoGebra faça a representação gráfica referente a cada sistema de equações e de acordo com os resultados apresentados organize-os em três grupos: sistemas possíveis e indeterminados (SPI) e sistemas impossíveis (SI) e sistemas possíveis e determinados (SPD):
possíveis e determinados (SPD):

a) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ 4x+4y-4z=4 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=3 \\ 4x+4y-4z=7 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ 4x+4y-4z=7 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} 2x+2y-2z=3 \\ x+y-z=1 \\ 4x+4y-z=4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x+4y-z=4 \\ 2x+2y-2z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 2x+3y+4z=5 \\ 4x+7y-z=13 \end{cases}$ *g)* $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=5 \\ 4x+y+3z=7 \end{cases}$ *h)* $\begin{cases} x+y-3z=1 \\ 5x+2y+z=2 \\ 9x+3y+5z=5 \end{cases}$

SISTEMA POSSÍVEL E INDETERMINADO

Sistema	*Proporcionalidade nos coeficientes e no termo independente.*	*Posição relativa entre os planos*	*Representação gráfica*

SISTEMA IMPOSSÍVEL

Sistema	*Proporcionalidade nos coeficientes e no termo independente.*	*Posição relativa entre os planos*	*Representação gráfica*

SISTEMA POSSÍVEL E DETERMINADO

Sistema	*Proporcionalidade nos coeficientes e no termo independente.*	*Posição relativa entre os planos*	*Representação gráfica*

Após preencher o quadro responda:

a) *Nos sistemas lineares 3 x 3 é possível estabelecer um único critério para todos os sistemas que fazem parte do grupo SPI? Justifique.*
b) *E em relação ao grupo SI? Justifique.*

Esta atividade teve como objetivo observar se o estudante relacionaria a representação gráfica das diferentes posições relativas entre os planos com a classificação dos Sistemas Lineares e com os casos de proporcionalidade ou combinação linear entre os coeficientes das incógnitas e dos termos independentes.

Destaca-se a importância de atividades envolvendo tratamentos em registros multifuncionais, pois "existem tratamentos que não se reduzem a algoritmos (os tratamentos puramente figurais ou visuais, como figuras geométricas, gráficos e esquemas). Tais tratamentos não são geralmente, objetos de aprendizagem por serem considerados de segunda importância" (ALMOLOUD, 2007, p. 74), no entanto, do ponto de vista cognitivo são igualmente importantes.

Para esta atividade foram elencados oito Sistemas Lineares que representassem cada uma das possíveis posições relativas entre os planos no espaço[3]. Optou-se em abordá-los primeiramente no registro gráfico e somente depois apresentar o método de escalonamento, partindo da hipótese de que isso facilitaria os tratamentos algébricos, pois o estudante já perceberia a relação entre a proporcionalidade e a classificação dos planos em: coincidentes, paralelos e concorrentes, o que Duval denomina de coordenação de registros.

> A organização de situações de aprendizagem centradas sobre a coordenação de registros requer então que tenhamos provavelmente identificadas todas as variações cognitivamente pertinentes de uma representação num registro, de forma que uma exploração conforme 'o método consistindo em fazer variar um só fator de cada vez, os outros sendo todos mantidos imutáveis' possa ser colocada em prática pelos alunos (DUVAL, 2009, p. 102-103).

Dada a dificuldade em representar gráficos de Sistemas Lineares 3 x 3 de forma manual, contou-se com o apoio do *software* GeoGebra. Os estudantes já conheciam este *software,* mas nessa etapa se explicou a necessidade de ativar o plano 3D e mais duas funcionalidades: os ícones "intersecção de duas superfícies" e "intersecção de dois objetos", que deveriam ser usados quando o estudante tivesse dúvidas em relação à intersecção entre os planos: por exemplo, não ficar visualmente nítido se os planos possuem um ponto ou uma reta em comum.

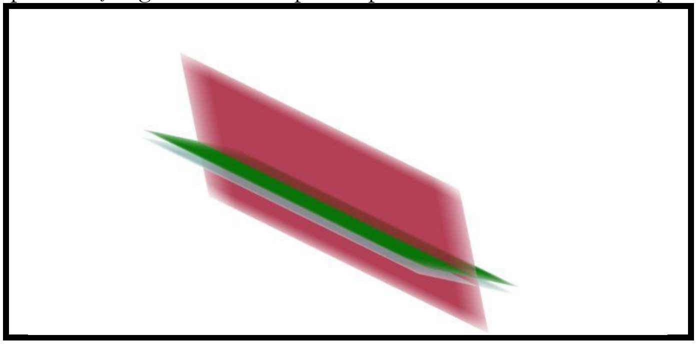
Esta atividade foi realizada em sala de aula com o uso de *notebooks*, mas como nem todos os estudantes trouxeram, organizou-se três duplas e três estudantes responderam individualmente.

Os estudantes foram orientados ainda a usar cores diferentes para representar os três planos e se necessário, girar os gráficos e aplicar o *zoom* até obterem uma imagem adequada, para a correta

[3] A descrição completa consta na dissertação do primeiro autor, cuja pesquisa apresentada faz parte.

classificação. A Figura 01 mostra, no entanto, ser difícil perceber que há dois planos paralelos, pois ficaram muito próximos.

Figura 01– Representação gráfica de dois planos paralelos e um concorrente pelo estudante K



Fonte: dados dos autores (2017)

Em relação à classificação dos Sistemas Lineares com base no registro gráfico percebeu-se que este registro facilitou a classificação, pois apenas nos Sistemas Lineares (e) e (h), os estudantes apresentaram alguma dificuldade ou erro, nos demais, eles classificaram de modo rápido e correto. Especificamente em relação ao Sistema Linear (h) ficou difícil de visualizar se havia ou não um ponto ou uma reta em comum entre os três planos, necessitando usar os ícones disponíveis no GeoGebra, no entanto, os estudantes ignoraram este procedimento.

Nesta atividade os estudantes precisaram relacionar o registro gráfico (posições relativas dos planos) com a proporcionalidade ou combinação linear entre os coeficientes das incógnitas e dos termos independentes. De acordo com Duval (2003), é a articulação entre diferentes registros de representação de um mesmo objeto a condição necessária para a compreensão em Matemática.

A maior dificuldade apresentada pelos estudantes ocorreu em justificar os critérios de classificação dos Sistemas Lineares a partir da posição relativa entre os planos. Deveriam compreender que quando um sistema é classificado como impossível, por exemplo, existem quatro possibilidades de posições relativas entre os planos e isso refletiria na proporcionalidade ou combinação linear entre os coeficientes das incógnitas e dos termos independentes.

Alguns estudantes escreveram justificativas incompletas, não mencionando, por exemplo, em que equações do Sistema Linear ocorria ou não a proporcionalidade e as dificuldades se acentuaram nas situações em que os três planos eram concorrentes.

Isso porque diferente dos Sistemas Lineares 2 x 2 em que retas concorrentes implicam sempre um Sistema Possível e Determinado e não há proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas, nos sistemas 3 x 3 há três possibilidades: 1) não haver proporcionalidade nem combinação linear (SPD), 2) ocorrer combinação linear tanto nos coeficientes das incógnitas quanto nos termos independentes de duas equações para formar a terceira (SPI) e combinação linear somente nos coeficientes das incógnitas (SI).

Assim, em relação ao Sistema Linear (g), os estudantes não justificaram de maneira adequada, pois duas respostas se limitaram a afirmar que os planos eram concorrentes, não completando que tinham uma reta em comum, constituindo assim um Sistema Possível e Indeterminado.

Mesmo que alguns estudantes não tenham justificado corretamente a classificação de alguns Sistemas Lineares, o uso de diferentes registros fez com que tivessem mais ferramentas disponíveis para analisar o objeto em estudo. É o que mostra a resposta de um estudante que fez a relação entre dois registros e afirmou que havia incoerência entre o registro gráfico e a proporcionalidade não permitindo classificá-lo "*Não há como classificá-los pois quanto ao desenho é SPI e na proporcionalidade é SPD*".

Em relação ao Sistema Linear (h) apenas uma dupla identificou tratar-se de uma combinação linear aplicada somente aos coeficientes das incógnitas, todos os demais estudantes apenas afirmaram que não havia proporcionalidade.

Atividade 02

Resolva os sistemas lineares usando o método do escalonamento e encontre o conjunto solução.

a) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ 4x+4y-4z=4 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=3 \\ 4x+4y-4z=7 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ 4x+4y-4z=7 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} 2x+2y-2z=3 \\ x+y-z=1 \\ 4x+4y-z=4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x+4y-z=4 \\ 2x+2y-2z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 2x+3y+4z=5 \\ 4x+7y-z=13 \end{cases}$ *g)* $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=5 \\ 4x+y+3z=7 \end{cases}$ *h)* $\begin{cases} x+y-3z=1 \\ 5x+2y+z=2 \\ 9x+3y+5z=5 \end{cases}$

A atividade 02 teve como objetivo verificar se o estudante faz os tratamentos algébricos adequados ao usar o método de escalonamento (também conhecido como método de eliminação de Gauss) na resolução de Sistemas Lineares 3 x 3 e se relaciona a classificação em SPD, SPI e SI com as soluções encontradas.

Para isso, os estudantes deveriam aplicar este método aos oito Sistemas Lineares da atividade 01. Isso permitiria fazer a comparação entre os resultados obtidos no tratamento algébrico e a classificação já realizada no registro gráfico, oportunizando verificar a incoerência de algumas respostas obtidas. Esta coordenação auxiliaria a chegarem ao final da resolução, compreendendo o significado da solução.

Iniciou-se a aula com a explicação da resolução de Sistemas Lineares pelo método de escalonamento. Apresentou-se dois exemplos, um SPD e outro SPI, e os estudantes de modo geral, não tiveram dificuldades em entender este método.

Justifica-se a importância de atividades envolvendo tratamentos, pois conforme apontado por Duval (2009, p. 52-53) "a aquisição de novos tratamentos quase instantâneos aparece então como condição de todo progresso qualitativo na aprendizagem. Porém essa aquisição passa necessariamente por uma fase de tratamentos intencionais".

No entanto, durante a resolução da atividade eles apresentaram dúvidas na interpretação dos resultados obtidos, principalmente na escrita da solução geral de Sistemas Possíveis e Indeterminados, como pode ser verificado na transcrição do diálogo entre professor e o estudante C, em relação ao Sistema Linear (a).

> *P: Aqui você multiplicou por (- 2). Quanto é (– 2) com (+ 2)?*
> *C: Zero. Ah, é tudo proporcional.*
> *P: Então é?*
> *C: SPI.*
> *P: Precisa escrever a solução geral.*
> *Depois de um tempo...*
> *P: Você isolou a incógnita **x**, certo, mas agora precisa escrever a solução.*
> *C: **1 – y – z***
> *P: Nesse caso tem duas variáveis livres, mas nem sempre é assim. Isso você vai verificar na resolução dos próximos sistemas.*
> *C: Duas variáveis livres por que ao usar o escalonamento as duas primeiras equações zeraram?*
> *P: Isso.*

Os estudantes perceberam que se tratava de um SPI pelo resultado $0x + 0y + 0z = 0$, no entanto, o fato de apresentar três incógnitas e a possibilidade de escrever uma solução geral com uma ou duas variáveis livres, dependendo da situação, fez com que fosse necessária a intervenção do professor. Em relação aos Sistemas Possíveis e Indeterminados são três possibilidades, portanto, três formas distintas de escrever a solução geral.

Na resolução do Sistema Linear (c), os estudantes resolveram corretamente, mas ficaram em dúvida sobre como classificá-lo, pois os resultados obtidos foram "$0x + 0y + 0z = 0$" e "$0x + 0y – 0z = 3$", dependendo das duas equações analisadas. Isso fica evidente novamente no diálogo entre o professor e o estudante C.

> *C: Isso aqui (**0x + 0y – 0z = 3**) também é SI né?*
> *P: Por quê?*

C: Porque é proporcional só nas incógnitas então deu este resultado.
P: Mas poderia ser SPI também?
C: Por quê?
P: Porque nessa parte deu $\mathbf{0x + 0y + 0z = 0}$. *Foi o que você falou antes que assim era SPI, lembra?*
C: Então por que é SI?
P: Observando as equações quais as posições entre os planos?
C (pensou um pouco, ficando em dúvida):Dois planos coincidentes e um paralelo.
P: Dois planos coincidentes e um terceiro paralelo a estes dois.
C: Por que dois planos coincidentes?
P: Porque ao usar o escalonamento você obteve $\mathbf{0x + 0y + 0z = 0}$. *Então que tipo de sistema é?*
C: SI.
P: Isso os três planos não tem ponto em comum.

Aponta-se a importância dos estudantes recorrerem ao registro gráfico, trabalhado anteriormente, para compreenderem porque este Sistema Linear foi classificado como Impossível, mais uma vez reforçando a Teoria de Duval (2003), a qual afirma que a possibilidade de transitar entre diferentes registros pode ser um facilitador para a aprendizagem do estudante.

> Se a conceitualização implica coordenação de registros de representação, o principal caminho das aprendizagens de base matemática não pode ser somente a automatização de certos tratamentos ou a compreensão de noções, mas deve ser a coordenação de diferentes registros de representação, necessariamente mobilizados por estes tratamentos ou por esta compreensão (MORETTI apud DUVAL, 2012, p.284).

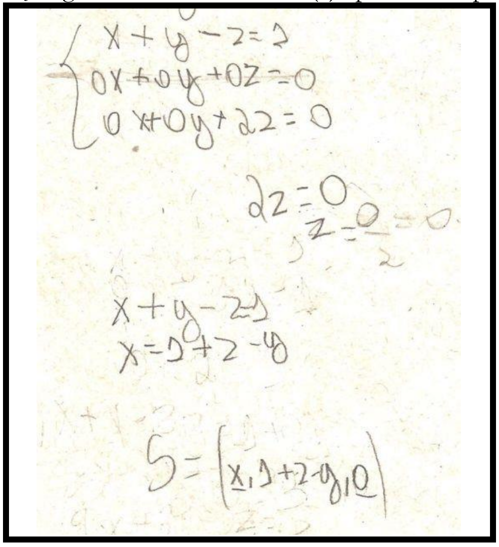
Ao resolver o Sistema Linear (d) os estudantes encontraram $z = 0$, o que num primeiro momento, os levou a considerar tratar-se de um SPD, no entanto, o resultado anterior $0x + 0y - 0z = 1$ evidenciou tratar-se de um SI. Neste caso o registro gráfico auxiliou novamente na compreensão da resposta obtida.

No Sistema Linear (e) os estudantes também encontraram $z = 0$, mas o outro resultado obtido $0x + 0y - 0z = 0$ implicou tratar-se de um SPI. Porém, por se tratar de posições relativas entre os planos diferentes do Sistema Linear anterior, a solução geral também possui características um pouco diferentes.

Os estudantes precisavam compreender que se tratava de um SPI, mas com um valor fixo, nesse caso $z = 0$, sendo que x e y poderiam assumir quaisquer valores e o sistema teria infinitas soluções.

Somente quatro estudantes escreveram a solução geral de forma correta, mesmo que sete estudantes tenham aplicado corretamente o método de escalonamento. Notou-se que alguns estudantes não consideraram que z deveria ser igual a zero ao escrever a solução geral (Figura 02). Outros erraram os sinais, ao isolar uma das incógnitas.

Figura 02 – Solução geral do Sistema Linear (6) apresentada pelo estudante V



Fonte: dados do autor (2017)

O Sistema Linear (f) tratava-se de um SPD, sendo que cinco estudantes resolveram corretamente e quatro parcialmente.

Em relação ao Sistema Linear (g) entre os erros cometidos na escrita da solução geral, três estudantes a escreveram considerando duas variáveis livres que não era o caso nesta situação, pois ao final do escalonamento havia duas equações e três incógnitas, evidenciando uma variável livre. Dois estudantes escreveram a solução geral de modo equivocado por errarem ao isolar uma das incógnitas e um terceiro estudante não explicitou como escreveu a solução geral, não permitindo verificar qual o erro cometido.

O último Sistema Linear tratava-se de uma combinação linear que resultava em Sistema Impossível, pois a combinação linear ficou restrita aos coeficientes das incógnitas. Dois estudantes não resolveram e dois cometeram erros no tratamento algébrico. Os demais resolveram corretamente.

Por fim destaca-se que essa atividade exigiu intervenções constantes do professor, inicialmente para auxiliar os estudantes no uso do método de escalonamento, depois na escrita da solução dos Sistemas Possíveis e Indeterminados e ainda na interpretação dos resultados obtidos quanto a classificação dos Sistemas Lineares.

No entanto, ao resolver os Sistemas Lineares pelo método do escalonamento e fazer a relação com a representação gráfica obtida anteriormente, os estudantes perceberam alguns equívocos nos tratamentos e na classificação via registro algébrico e isto reforça a necessidade de trabalhar de forma concomitante as representações de um mesmo objeto matemático, conforme já apontado por Duval (2003).

Considerações finais

Esta pesquisa contribuiu para que os estudantes do 2º ano do Ensino Médio compreendessem a resolução e a classificação de Sistemas Lineares e interpretassem os resultados obtidos uma vez que a abordagem baseada na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval, explorando o tratamento, a conversão e a coordenação entre os diferentes registros de representação, favoreceu o entendimento das situações exploradas.

Constatou-se ainda que os estudantes tiveram dificuldades nos tratamentos algébricos nos Sistemas Lineares 3 x 3, devido a erros, na manipulação algébrica e operações envolvendo os números inteiros, especialmente os números negativos.

A maneira como foi abordada a relação entre o registro gráfico, o algébrico e a proporcionalidade dos coeficientes das incógnitas e dos termos independentes mostrou-se favorável ao entendimento dos estudantes. Compreenderam que existem quatro posições entre os planos para representar os Sistemas Impossíveis, três para representar os Sistemas Possíveis e Indeterminados e uma para os Sistemas Possíveis e Determinados.

Além disso, para relacionar a representação algébrica com a gráfica, perceberam que deveriam tomar as equações duas a duas e não as relacionar diretamente, para obter a classificação dos Sistemas Lineares. Assim, verificaram que, de acordo com as posições relativas entre os dois planos: 1) proporcionalidade ou combinação linear tanto nos coeficientes das incógnitas quanto nos termos independentes implica em planos coincidentes, 2) proporcionalidade ou combinação linear nas incógnitas dos coeficientes, mas que não se estende para os termos independentes tem-se planos paralelos e 3) ausência de proporcionalidade nas incógnitas independente de haver ou não proporcionalidade nos termos independentes implica planos concorrentes.

Uma das dificuldades apresentadas por todos os estudantes foi a escrita da solução geral de Sistemas Possíveis e Indeterminados 3 x 3, pois há casos em que há apenas uma variável livre e outros em que são duas as variáveis livres e isso não foi plenamente compreendido pelos estudantes. Essa constatação também ocorreu no trabalho de Jordão (2011).

O *software* GeoGebra foi uma importante ferramenta que possibilitou a compreensão do significado dos resultados obtidos no tratamento algébrico pois permitiu observar as alterações dos coeficientes das equações representadas algebricamente e a discriminação das variáveis visuais pertinentes apontadas pela Teoria de Registros de Representação Semiótica. Constatou-se que na representação gráfica de Sistemas Lineares 3 x 3 ocorreu certa dificuldade de visualização quando os três planos eram concorrentes, não permitindo classificá-los de maneira confiável e foi necessário fazer uso dos recursos algébricos disponíveis no GeoGebra.

Assim conclui-se que o estudante "não tem simplesmente sucesso, mas modificação da qualidade das produções. Esse salto qualitativo no desenvolvimento das competências e das performances aparece ligado à coordenação de sistemas semióticos nos alunos" (DUVAL, 2009, p. 19). E isso foi gradativamente evidenciado durante a aplicação das atividades.

Referências

ALMOLOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007. 218 p.

BATTAGLIOLI, Carla dos Santos Moreno. **Sistemas Lineares na 2ª série do Ensino Médio:** um olhar sobre os livros didáticos. 2008. 113 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2008.

BOEMO, Marinela da Silveira. **Registros de representação semiótica mobilizados no estudo de sistemas lineares no Ensino Médio**. 2015. 165 f. Dissertação (Mestrado) Curso de Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos:** PNLD, 2015. Matemática: ensino médio. Brasília, 2014.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p. 11- 33.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. 119 p.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar Matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semiótica. Organização Tânia M. M. Campos.
Tradução: Marlene Alves Dias. 1 ed. São Paulo: PROEM, 2011. 160 p.

DUVAL, Raymond. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. Florianópolis: REVEMAT, 2012b, v.7, nº 02, p. 266-297.

FREITAS, Nilza Aparecida de. **Sistemas de Equações Lineares:** Uma proposta de atividades com abordagem de diferentes Registros de Representação Semiótica. 2013. 180 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

JORDÃO, Ana Lucia Infantozzi. **Um Estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3 x 3 no 2º ano do Ensino Médio.** 2011. 193 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

QUEIROZ, Carlos Antônio; RAMOS, Elenita Eliete de Lima; SIPLE, Ivanete Zuchi. **Tópicos Especiais em Ciências I:** representação semiótica, tecnologias educacionais e atividades experimentais. Florianópolis. Publicações do IF-SC, 2011. 105 p.