

UM CONVITE À MODELAGEM COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

AN INVITATION TO MODELING WITH DIFFERENTIAL EQUATIONS

Aldo Peres Campos Lopes¹ 

Resumo

Apresentamos aqui um produto educacional concebido durante uma pesquisa realizada em meados de 2020. Como alternativa ao ensino tradicional da disciplina Equações Diferenciais, adotamos a Modelagem Matemática. A Modelagem pode auxiliar na compreensão de problemas/fenômenos reais. Também, é preciso incluir uma discussão crítica em todo o processo de obtenção do modelo, para que a atividade de Modelagem não seja apenas uma maneira diferente de se reproduzir o ensino tradicional. Dessa forma, os alunos poderão desenvolver diversas competências, como ter habilidades de aplicar o que aprendem e ter uma atitude crítica quanto ao modelo produzido e suas implicações na sociedade. Certamente, tais competências são importantes para futuros profissionais. As críticas dos alunos se expressam por meio de um perfil, em que alguns estão indo na direção da ideologia da certeza, enquanto outros vão no caminho oposto. O produto foi testado e obteve resultados positivos nas turmas de engenharias em que foi utilizado.

Palavras-chave: Ensino Superior; Modelagem Matemática; Equações Diferenciais; Educação Matemática Crítica; Perfil crítico.

Abstract

We present here an educational product conceived during a survey carried out in mid-2020. As an alternative to the traditional teaching of the Differential Equations subject, we adopted Mathematical Modeling. Modeling can help to understand real problems/phenomena. Also, it is necessary to include a critical discussion in the entire process of obtaining the model, so that the Modeling activity is not just a different way of reproducing traditional teaching. In this way, students will be able to develop different skills, such as having the ability to apply what they learn and having a critical attitude towards the model produced and its implications for society. Certainly, such skills are important for future professionals. The students' criticisms are expressed through a profile, in which some are going in the direction of the ideology of certainty, while others are going in the opposite direction. The product was tested and obtained positive results in the engineering classes in which it was used.

Keywords: Higher Education; Mathematical Modeling; Differential Equations; Critical Mathematics Education; Critical profile.

¹ UNIFEI. Prof. Adjunto da Unifei, departamento de Matemática.

Introdução

A disciplina Equações Diferenciais (ED) é parte integrante da formação de muitas engenharias e diversos outros cursos. Boyce e Di Prima (1999, prefácio) salientam “que as Equações Diferenciais, mesmo as mais simples, podem ser úteis para modelar fenômenos físicos”. Conforme frisa Bruno Scárdua (2015, prefácio), geralmente, a modelagem de vários fenômenos diversos (físicos, biológicos, entre outros) decorre de um bom entendimento das características locais, globais e, por vezes, assintóticas de uma variedade de equações diferenciais.

Algumas pesquisas têm sido feitas a fim de se averiguar o ensino e a aprendizagem das ED (VAJRAVELU, 2018; OLIVEIRA; IGLIORI, 2013). A fim de amenizar as dificuldades de aprendizagem, os autores sugerem um enfoque qualitativo, de um modo contextualizado (com aplicações em problemas práticos reais), conciliando as abordagens numéricas e gráficas com auxílio de um software adequado.

Como uma alternativa para desenvolver habilidades de fazer aplicações em problemas reais, temos a Modelagem Matemática (ou Modelagem, para simplificar). O aumento da relevância da Modelagem Matemática foi destacado por pesquisas recentes (BLUM, 2015; HERNANDEZ-MARTINEZ; VOS, 2018; ALMEIDA, 2018). Por meio da Modelagem é possível desenvolver diversas competências (KAISER; BRAND, 2015), tais como a criatividade (LU; KAISER, 2021). Apesar de empecilhos para sua adoção, seu uso tem sido promissor, principalmente quando se ampliam as discussões de modo a pensar a adoção da Modelagem segundo aquele que a adota, o professor (MUTTI; KLÜBER, 2021).

Vários trabalhos têm empregado o olhar da educação matemática crítica (EMC) em atividades de modelagem (BARBOSA, 2006; ARAÚJO, 2010; VELEDA; BURAK, 2017). Uma característica que aproxima a modelagem da EMC é o fato de que, amiúde, não existe resposta única para o fenômeno analisado e, além disso, existem muitas maneiras de se chegar a uma solução. Esse fato coloca a Matemática como uma área que tem influência humana, e, portanto, que pode ser questionada (BORBA; SKOVSMOSE, 1997; BORBA, 2001). Um dos pontos iniciais é o encorajamento do professor para que o aluno pense criticamente a respeito de sua matemática (ARAÚJO, 2010; LOPES, 2020; SACHEDVA; EGGEN, 2021).

Objetivos: Apresentamos aqui um produto educacional concebido e utilizado por ocasião de uma pesquisa empírica, realizada no primeiro semestre de 2020 — em uma universidade federal brasileira, com alunos de engenharia. Esse produto é um livro/manual com 4 atividades de modelagem matemática que envolvem equações diferenciais ordinárias (EDO) com o olhar da EMC. O intuito é utilizar uma metodologia diferente da tradicional para a disciplina, a fim de

melhorar a aprendizagem, a motivação do aluno e contribuir para o desenvolvimento de sua criticidade.

Público-alvo: Ele é direcionado a professores que lecionam ED na graduação e a outros interessados que almejam uma outra abordagem da disciplina.

Aplicabilidade: O produto educacional é aplicável em disciplinas introdutórias de ED que abordam EDO de 1ª ordem e de ordem superior. Diversos cursos, como as engenharias, podem tirar proveito desse material. Mais adiante detalharemos alguns aspectos do uso do produto.

Aspectos Teóricos

Mesmo que de forma diminuta, é possível encontrar pesquisas que enfatizam o ensino de ED, por meio de problemas contextualizados ou de modelagens de fenômenos reais (LOPES, 2021). Além disso, essas pesquisas destacam o caráter formativo dos alunos e o desenvolvimento de habilidades como benefícios de se introduzir a modelagem em disciplinas de ED.

O ensino habitual de disciplinas como Equações Diferenciais (ED) está marcado pela falta de diálogos, na reprodução sequencial dos conteúdos, de acordo com a indicação linear do currículo concebido. Com isso, a modelagem pode auxiliar na aprendizagem e retenção de conteúdo da disciplina (OLIVEIRA; IGLIORI, 2013). Além disso, uma característica importante e essencial para a formação de um futuro engenheiro é o desenvolvimento de sua criticidade, que pode ser feita por meio de atividades de modelagem (GEIGER et al., 2021).

Uma opção para fundamentar a criticidade em atividades de modelagem é a EMC. Dessa forma, haverá momentos de discussões a respeito do papel da Matemática na sociedade. Os problemas advindos da COVID-19 aumentam a importância da EMC que declara que a Matemática não é neutra (ENGELBRENCH *et al.*, 2020). Temos, portanto, de repensar o papel da matemática na sociedade, refletindo a respeito e realizar uma crítica dessa situação — inclusive das desigualdades sociais e econômicas enfrentadas por diversos alunos no período de aulas remotas. Uma crítica deve ser feita à posição assumida pela Matemática, à sua utilização por empresas e governos e até mesmo à posição assumida por instituições de ensino.

Dentre os conceitos e as noções da EMC, destacaremos a ideologia da certeza e o paradigma do exercício. A ideologia da certeza (BORBA; SKOVSMOSE, 1997; BORBA, 2001) é a estrutura presente devido às noções absolutistas da Matemática. A ideologia da certeza se deve a três premissas (SKOVSMOSE, 2019). A matemática é vista como *neutra*, pois não é influenciável e não serve a interesses particulares, é *objetiva* por apresentar os fenômenos como eles realmente são, sem subjetividades e, além disso, por ter um caráter racional, é garantida a sua *certeza*. As consequências dessa ideologia são negativas, pois decisões podem ser tidas como importantes e

necessárias (i. e., certas), neutras e objetivas. Muitos acreditam que a Matemática é pura e não sofre influências, podendo ser aplicada em qualquer situação, o que camufla interesses pessoais e questões políticas. A Matemática toma, assim, uma posição de poder e autoridade em meios de comunicação e nos ambientes escolares e acadêmicos (BORBA, 2001). Encontramos na sociedade e na mídia expressões como: “foi provado matematicamente” e “os números falam por si” (BORBA, 2001). As instituições de ensino e pesquisa perpetuam essa ideologia por separar a matemática pura da aplicada, sem desafiá-la. As situações debatidas nas aulas de Matemática não condizem com a realidade, pois são artificiais. Caso sejam extraídas do mundo real, simplificações são feitas a fim de ajustá-las ao universo da Matemática, levando a uma solução “ideal”. Porém, tais soluções ignoram elementos da realidade, tais como os impactos sociais, políticos, ambientais e econômicos, que são foco do debate da ideologia da certeza.

No paradigma do exercício (SKOVSMOSE, 2001; BORBA, 2001), o debate está direcionado para os conteúdos programáticos da disciplina. A preocupação predominante é com a Matemática em si mesma, assumindo a Matemática pela Matemática. Numa aula tradicional de Equações Diferenciais, por exemplo, geralmente, os alunos fazem diversos exercícios selecionados pelo professor, que é o ponto central das atenções, e conferem a resposta. Se a resposta pessoal coincidiu com a do livro, então eles começam o próximo exercício – ou seja, perpetuam o paradigma e reforçam a ideologia da certeza. Dessa forma os alunos não ampliam o olhar para uma visão crítica do fenômeno estudado.

Para se contrapor a esse paradigma é necessário um esforço, pois os alunos estão acostumados, por muitos anos, à previsibilidade do paradigma vigente. Porém, alguns são mais resistentes quanto a adoção de um novo viés pedagógico, pois estão saindo de uma zona de conforto para uma de “risco”. Uma possível solução para combater a ideologia da certeza é uma atuação diferenciada em uma tradicional sala de aula, salientando que a Matemática pode ser contestada e que, muitas vezes, não carrega a resposta final ou “ideal”.

Metodologia

As atividades foram produzidas na perspectiva educacional de Biembengut (2016). Segundo ela, a Modelagem Matemática no ambiente educacional é um método de ensino com pesquisa nos limites e espaços escolares, em qualquer disciplina e fase de escolaridade: dos anos iniciais do Ensino Fundamental aos finais do Ensino Superior. Frisamos que essa perspectiva de Modelagem é somente uma dentre várias outras, porquanto todas têm em comum, o uso da Matemática para o estudo de situações reais.

Biembengut (2016) apresenta três etapas para que a modelagem seja realizada na sala de aula:

- a) Percepção e apreensão;
- b) Compreensão e explicitação;
- c) Significação e expressão.

Na primeira etapa, ocorre um entendimento inicial (intuitivo) do fenômeno, destacando as variáveis e formulando a equação (diferencial) a ser resolvida. Em seguida, na etapa (b), o modelo matemático é obtido, pela resolução da equação. Na última etapa (c), as soluções devem agora ser interpretadas “em termos do problema real” (BURGHES; BORRIE, 1981, p. 14). É nesta etapa em que a maior parte das discussões críticas ocorrem.

Os temas das atividades de modelagem matemática foram inspirados no livro de Burghes e Borrie (1981), exceto a modelagem 1-B. Os temas foram:

1º bloco: 1A) Absorção de álcool no organismo e o risco de acidentes

1B) Adequação de uma dieta

2º bloco: 2A) Comportamento de compra do consumidor

2B) Propagação de uma epidemia

Os temas do 1º bloco envolveram EDO de 1ª ordem e os temas do 2º bloco, EDO de ordem superior. Para a condução das atividades de modelagem matemática, realizamos uma adaptação dos 8 passos para aplicações de EDO em fenômenos físicos, conforme descritos em Laudares *et al.* (2017). Por conseguinte, elaboramos os seguintes passos didáticos que constam na tabela 1.

Tabela 1. Procedimentos didáticos em cada passo da modelagem matemática.

Passo	Procedimento	Passo	Procedimento
1	Identificação das variáveis	6	Explicitação do modelo
2	Resolução da EDO	7	Gráficos
3	Identificação das condições iniciais	8	Descrição sintética do fenômeno
4	Resolução da EDO com as condições iniciais	9	Análise da adequação do modelo à realidade
5	Casos particulares	10	Discussão crítica do modelo

Fonte: Autoria própria

Esses passos estão de acordo com as três etapas de Biembengut (2016). Na parte inicial de “(a) percepção e apreensão”, temos o Passo 1. Em seguida, temos “(b) compreensão e explicação”

que está relacionada com os Passos 2 ao 7 e, por fim, a parte “(c) significação e expressão” contempla os Passos 8 ao 10.

Sem a realização das interpretações e das conexões com a realidade, além de deixar de se caracterizar uma atividade de Modelagem, os alunos não irão perceber que a Matemática atua de forma importante na resolução de problemas reais. Dessa forma, os passos 9 e 10 foram adicionados ao esquema original a fim de contribuir com (e averiguar) a percepção crítica dos alunos perante o modelo produzido pelo grupo, visto que Laudares *et al.* (2017, p. 98) reconhecem que “essa estrutura pode ser considerada um padrão a ser seguido, ocorrendo alterações de acordo com o tipo de problema a resolver”. Esses passos adicionais são uma forma de incentivar as discussões e expressões dos alunos em aspectos críticos do modelo, ou seja, ir além dos aspectos matemáticos.

Apresentamos a seguir uma das modelagens com alguns detalhes. A modelagem começa com um problema. Em seguida, explicitamos a EDO envolvida. A fim de auxiliar as pesquisas dos grupos e as discussões críticas, deixamos indicado algumas sugestões e perguntas — muitas dessas surgiram nas discussões dos grupos que realizaram essa modelagem. Os detalhes das outras modelagens podem ser visualizadas no produto educacional, por meio do *link*: https://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/13062/6/PRODUTO_AtividadeModelagemMatem%0c3%0a1tica.pdf.

Modelagem 2-B: Propagação de uma epidemia

Problema: Como formular um modelo que mostre a propagação de uma epidemia?

Equação envolvida: Uma possibilidade é a utilização do modelo SIR, que é dado pelo seguinte sistema de EDO:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

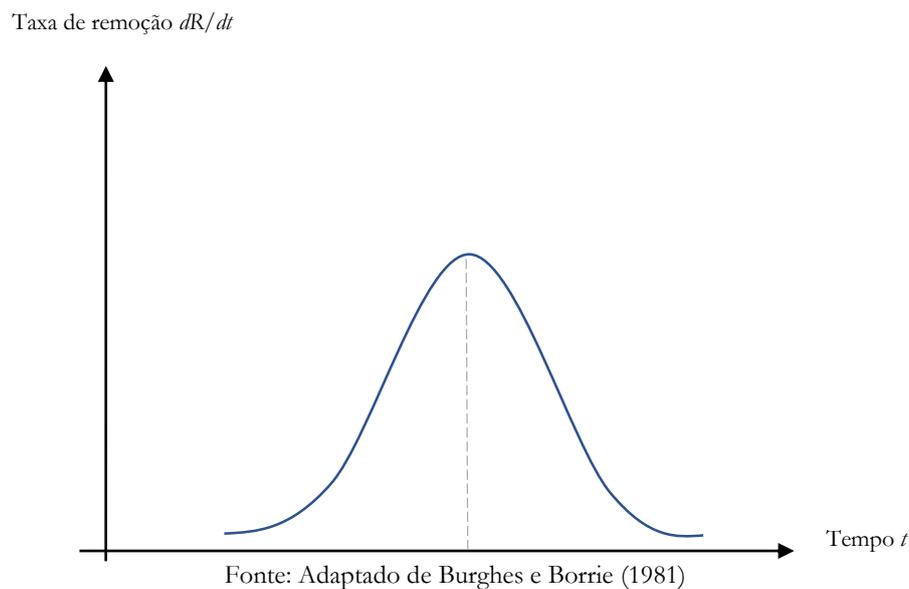
A população considerada é dividida em três grupos distintos dos quais o modelo deriva seu nome. O parâmetro $S = S(t)$ é a porção não infectada da população que ainda é suscetível à doença, no momento t , enquanto $I = I(t)$ é o número de pessoas que foram infectadas com a doença no

momento t e são capazes de espalhá-la para aquelas do grupo $S(t)$. Finalmente, $R = R(t)$ representa a parte “removida” da população, ou seja, aqueles que não são mais capazes de infectar ou espalhar a infecção devido à recuperação e subsequente imunidade, aqueles que estão de quarentena e aqueles que faleceram. Foi utilizado que a população total é representada por N , de modo que $N = S(t) + I(t) + R(t)$. Como consequência, observe que a soma das três equações do sistema é uma constante, zero. Foi usado β como a taxa de infecção da doença e $1/\gamma$ como o período médio de infecção.

Sugestão: Cada grupo escolher uma cidade para obter as constantes e realizar uma discussão crítica, comparando com modelos divulgados pela mídia.

Discussão do modelo: Como incluir no sistema o caso vacinado? O que haverá de diferente no modelo se a população não for considerada constante? Quais as implicações no modelo de considerar que uma pessoa infectada pode ser infectada novamente? Como fazer para que a amplitude da curva em forma de sino (Figura 1) seja menor?

Figura 1: Taxa prevista de remoções.



Discussão crítica: Quais modelos matemáticos têm justificado as ações e decisões de governos? Os números de infectados e de mortos divulgados pela mídia são razoáveis ou exagerados? Quais informações divulgadas por governos e pela mídia podem estar distorcidas?

Discussão

O conjunto de atividades de modelagem realizada torna possível oferecer um ambiente de aprendizagem diferente, em que se “oferece recursos para fazer investigações” (SKOVSMOSE, 2001), como uma alternativa para o paradigma do exercício e a ideologia da certeza.

Os alunos que realizaram as modelagens descritas nesse artigo, de um modo geral, conseguiram perceber contribuições do uso da Modelagem, na perspectiva de uma “prática docente fundamentada nos preceitos da Modelagem Matemática na Educação evidenciando o caráter mediador do professor e tornando o estudante mais autônomo em relação a sua aprendizagem” (SCHELLER; BONOTTO; BIEMBENGUT 2015, p. 17). Dessa forma, proporcionamos uma combinação entre a teoria e a prática, conectando a esfera acadêmica da Matemática com a Matemática existente no dia a dia e, mais ainda, contribuindo para a leitura crítica do fenômeno. Assim, enquanto uma possibilidade metodológica, a Modelagem Matemática teve um bom e amplo recebimento pelos alunos. Isso foi corroborado através do conhecimento construído mediante a atividade conduzida.

Uma unanimidade verificada é que as atividades proporcionaram uma boa motivação para os alunos. Eles se sentiram motivados a estudar, pesquisar e a se interessar mais pela disciplina, e pela Matemática em geral. Motivados, os alunos fizeram pesquisas e se dedicaram mais aos estudos da disciplina. Destacamos também que as aplicações da Matemática são recursos úteis para auxiliar tanto no ânimo dos alunos quanto no interesse na disciplina e em aprender mais (OLIVEIRA; IGLIORI, 2013; LOPES, 2021).

Um modelo matemático fornece uma leitura de uma situação, que não é possível de outra maneira e para isso são feitas simplificações, o que limita a compreensão do fenômeno. (SKOVSMOSE, 2019). Reconhecer a natureza tendenciosa de um modelo é importante, pois pode haver não somente uma leitura incorreta de uma situação, mas também um manejo incorreto (BARBOSA, 2006; SKOVSMOSE, 2019). Muitos dos alunos percebem, portanto, que a Matemática não é uma descrição neutra da realidade.

A análise das discussões críticas dos alunos durante todo o processo de modelagem revelou um *perfil crítico* por parte dos alunos. Notamos que esse perfil crítico variou entre dois extremos. De um lado, foi identificado um *perfil conservador*, em que os alunos se mostravam apegados a ideologia da certeza, tendo uma visão “apaixonada” da matemática, considerando-a neutra e sem influência direta na sociedade, não saindo de seus limites ao fazerem suas conclusões. Por outro lado, identificamos um *perfil liberal* em que a influência da matemática na sociedade e suas consequências foram duramente criticadas, considerando fatores da realidade dos modelos, tendo em vista aspectos políticos, econômicos e sociais. No meio desse espectro encontramos o *perfil misto*, no

qual os alunos/grupos esboçaram críticas à Matemática, ao modelo produzido e sua aplicabilidade, mas de alguma forma ainda estão conectados ao método tradicional de ensino e à ideologia da certeza.

Conclusão

Por anos, os alunos estão acostumados a resolver diversos exercícios repetitivos, descontextualizados, por meio de um algoritmo. Assim, ficam de lado a criatividade, o raciocínio lógico e outras habilidades. Primar por uma aprendizagem baseada na criatividade, lógica e experimentação pode não ser fácil e, por vezes, constitui uma tarefa desafiadora. Romper com esse “sistema” é possível. Uma opção é por meio de atividades de modelagem matemática.

As atividades de Modelagem podem propiciar um conhecimento reflexivo crítico a respeito da sociedade. Outrossim, para haver um conhecimento reflexivo na modelagem, é essencial que ela seja realizada de modo a explorar situações da realidade. Isso é possível por convidar os alunos a se expressarem livremente, questionando a ideologia da certeza nas atividades de modelagem desenvolvidas. Tais atividades são uma forma de se distanciar do paradigma do exercício, da ideologia da certeza, aplicar o conteúdo de ED em situações reais e produzir uma discussão crítica em todo o processo. Dessa forma, os alunos podem ter um novo olhar para a Matemática.

Ao se empregar a modelagem na perspectiva da EMC, tanto professores quanto alunos são constituintes dos processos de ensino e aprendizagem. Tal imbricação não conduz a discussões relacionadas unicamente a Matemática, mas também a questões relacionadas ao cotidiano do próprio aluno e que apresentam relevância social, estejam ligadas à cidadania e a sua prática responsável.

As expressões dos alunos podem revelar um *perfil crítico*. De um lado do espectro, em um perfil mais conservador, os alunos atuam em conformidade com a ideologia da certeza e reproduzem ideias absolutistas da matemática, muitas vezes encontradas na mídia. Entretanto, vários alunos conseguem dar um passo adiante, distanciando dessa ideologia. Assim, do outro lado do espectro, em um perfil liberal, encontramos os alunos que questionam a posição assumida pela matemática tanto nos meios escolares e acadêmicos, quanto nos meios de comunicação, indo contra a ideologia da certeza. Entre esses dois extremos, temos um perfil misto, em que há uma dificuldade em romper com a vigente ideologia da certeza, apesar de haver críticas quanto a posição assumida pela matemática.

Tendo em vista todo o percurso das atividades de modelagem, entendemos que os alunos possuem oportunidades de aplicar o conteúdo de ED em situações reais, olhando criticamente para a Matemática e compreendendo como o conteúdo matemático exerce influência nos processos

decisórios da sociedade. Tais características são essenciais para futuros engenheiros e outros profissionais. Vemos que é importante convidá-los a se expressar e a ter um novo olhar para a matemática. Diante disso, percebemos a importância das discussões realizadas entre os alunos e com o incentivo das atividades de modelagem, desde o início das aulas, para o desenvolvimento da criticidade. Tais discussões possibilitaram um início para uma reflexão crítica em torno da Matemática e seu papel social. As instituições de ensino e pesquisa não desafiam/questionam a própria matemática, separando a parte “pura” da “aplicada” (SKOVSMOSE, 2019). Dessa forma, a ideologia da certeza fica fortalecida. As consequências são diversas, como acreditar e aceitar as decisões de empresas e de governos, que escondem suas pretensões. Porém, esse ciclo precisa ser rompido. A condução das atividades de modelagem mostrou que isso é possível.

Recomendamos, portanto, que mais atividades sejam feitas em prol do amadurecimento das críticas dos alunos, para que eles reconheçam a posição não neutra da matemática na sociedade e se desvinculem da ideologia da certeza. Um passo nessa direção pode não ser fácil, pois disciplinas como as ED valorizam a matemática pela matemática, com poucas ou nenhuma aplicação no mundo real, o que não contribui para uma formação crítica do aluno. É necessário um esforço contínuo, um trabalho constante com os alunos para ajudá-los a enxergar além do que normalmente eles estão acostumados.

Esses resultados apontam uma janela de oportunidade de pesquisas que auxiliem não somente no aprendizado da disciplina ED, mas também no desenvolvimento da criticidade nos alunos. Infelizmente, a quantidade de trabalhos que utilizem modelagem matemática com a abordagem da EMC é pequena no Ensino Superior, e, por isso, vemos uma região de inquérito rica em possibilidades investigativas. Mais especificamente, as pesquisas de Educação Matemática que utilizem Modelagem Matemática com Equações Diferenciais podem se embasar na EMC, contribuindo para a criticidade do aluno, pois, como afirma Skovsmose (2017), a EMC é relevante para estudantes universitários.

Referências

- ALMEIDA, L.M.W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities, **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 50, 2018, p. 19–30. Disponível em <<https://doi.org/10.1007/s11858-017-0902-4>>. Acesso em: 12 jan. 2022.
- ARAÚJO J. L. Pesquisa brasileira sobre modelagem em educação matemática. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 42, p. 337-348, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11858-010-0238-9>>. Acesso em: 12 jan. 2022.

- BARBOSA J.C. Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 38, p. 293–301, 2006. Disponível em <<https://doi.org/10.1007/BF02652812>>. Acesso em: 12 jan. 2022.
- BIEMBENGUT M. S. **Modelagem na educação matemática e na ciência**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.
- BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), **Proceedings of the 12th international congress on mathematical education**. New York: Springer, 2015, p. 73-96.
- BORBA M. C. (2001) A ideologia da certeza em educação matemática. In O. Skovsmose, **Educação matemática crítica: A questão da democracia**. Campinas: Papirus, 2001, p. 127-148.
- BORBA M.; SKOVSMOSE, O. The ideology of certainty in mathematics education. **For the learning for mathematics**, Kingston v. 17, n. 3, p. 17-23, 1997. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/40248248>>. Acesso em: 12 jan. 2022.
- BOYCE W. E.; DIPRIMA R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- BURGHES D. N.; BORRIE M.S. **Modelling with Differential Equations**, Colston Papers. E. Horwood, 1981.
- ENGELBRECHT J.; BORBA, M.C.; LLINARES S.; KAISER G. Will 2020 be remembered as the year in which education was changed? **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 52, p. 821–824, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11858-020-01185-3>>. Acesso em: 12 jan. 2022.
- GEIGER V.; GALBRAITH P.; NISS M. *et al.* Developing a task design and implementation framework for fostering mathematical modelling competencies. **Educational Studies in Mathematics**, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10649-021-10039-y>>. Acesso em: 12 jan. 2022.
- HERNANDEZ-MARTINEZ, P.; VOS P. “Why do I have to learn this?” A case study on students’ experiences of the relevance of mathematical modelling activities, **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 50, p. 245–257, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11858-017-0904-2>>. Acesso em: 12 jan. 2022.
- KAISER, G.; BRAND, S. Modelling competencies: Past development and further perspectives. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), **Mathematical Modelling in Education Research and Practice. Cultural, Social and Cognitive Influences**. Dordrecht: Springer, 2015, p. 129–149.
- LAUDARES J. B.; MIRANDA D. F.; REIS J. P. C.; FURLETTI S. **Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace: Análise gráfica de fenômenos com resolução de problemas Atividades com softwares livres**. v. 1. 319 p. 1a. ed., Belo Horizonte: Artesã, 2017.

- LOPES, A. Formação crítica dos professores de Matemática articulada às questões contemporâneas. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 11, n. 6, p. 809-817, 1 out. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.26843/rencima.v11i6.1901>>. Acesso em: 12 jan. 2022.
- LOPES, A. Modelagem Matemática e Equações Diferenciais: um mapeamento das pesquisas em Educação Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 4, p. 1-25, 30 set. 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.26843/rencima.v12n4a16>>. Acesso em: 12 jan. 2022.
- LU X.; KAISER G. Creativity in students' modelling competencies: conceptualization and measurement. **Educational Studies in Mathematics**, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10649-021-10055-y>>. Acesso em: 12 jan. 2022.
- MUTTI G. S. L.; KLÜBER, T. E. Adoção da Modelagem Matemática: o que se mostra na literatura produzida no âmbito da Educação Matemática. **Boletim de Educação Matemática**, v. 35, n. 69, p. 129-157, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a07>>. Acesso em: 12 jan. 2022.
- OLIVEIRA E. A.; IGLIORI S. B. C. Ensino e Aprendizagem de equações diferenciais: Um levantamento preliminar da produção científica. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 4, n. 2, p. 2-22, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.36397/emteia.v4i2.2231>>. Acesso em: 12 jan. 2022.
- SACHDEVA S.; EGGEN P. O. Learners' Critical Thinking About Learning Mathematics. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 16, n. 3, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.29333/iejme/11003>>. Acesso em: 12 jan. 2022.
- SCÁRDUA, B. (2015). **Equações ordinárias e aplicações**. SBM, Rio de Janeiro.
- SHELLER M.; BONOTTO D. L., BIEMBENGUT M. S. Formação Continuada e Modelagem Matemática: Percepções de Professores. SBEM: **Educação Matemática em Revista**, n. 46, 2015.
- SKOVSMOSE O. Landscapes of Investigation. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 33, p. 123–132, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02652747>>. Acesso em: 12 jan. 2022.
- SKOVSMOSE O. O que poderia significar a Educação Matemática para diferentes grupos de estudantes? **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 6, n. 12, p. 18-37, 2017.
- SKOVSMOSE O. Crisis, Critique and Mathematics. **Philosophy of Mathematics Education Journal**, v. 35, 2019. Disponível em: <<https://vbn.aau.dk/en/publications/crisis-critique-and-mathematics>>. Acesso em: 12 jan. 2022.
- VAJRABELU, K. Innovative Strategies for Learning and Teaching of Large Differential Equations Classes. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 13, n. 2, p. 91-95, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.12973/iejme/2699>>. Acesso em: 12 jan. 2022.

VELEDA G. G.; BURAK D. Mathematical modelling in mathematics education as a way to develop critical consciousness: A theoretical essay. **Acta Scientiae**, v. 19, n.2, p. 211-223, 2017.