

ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROPORCIONALIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA CENTRADOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TEACHING AND LEARNING PROPORTIONALITY IN ELEMENTARY SCHOOL WITH FOCUS ON PROBLEM SOLVING

Manoel dos Santos Costa¹ 

Norma Suely Gomes Allevato² 

Resumo

A investigação registrada neste artigo tem por objetivo analisar aspectos relevantes sobre uma atividade formativa (minicurso) realizada com professores em exercício e estudantes do curso de licenciatura em Matemática, que buscavam novos recursos para desenvolver os conteúdos (objetos de conhecimento) com seus alunos. Tal experiência fundamentou a presente pesquisa, de natureza qualitativa, cujos dados foram coletados por meio da observação participante e análise documental. No minicurso, os participantes vivenciaram a Resolução de Problemas enquanto Metodologia de Ensino e Aprendizagem para o desenvolvimento do trabalho em sala de aula, cujo conteúdo abordado foi a proporcionalidade. A ideia foi partir da resolução dos problemas, seguindo as etapas sugeridas por Allevato e Onuchic, para, em seguida, promover uma discussão e reflexão sobre o conteúdo e, somente ao final do trabalho, realizar a formalização dos novos conceitos construídos. Foi possível perceber, na resolução dos problemas, indícios do raciocínio proporcional revelados pelos participantes. Além disso, os resultados mostram que eles foram mobilizando novas estratégias de resolução, empregando tanto o pensamento quantitativo (que envolve algoritmos numéricos) quanto o qualitativo (que analisa e explica as estratégias utilizadas na resolução). Ademais, saíram da condição de ouvintes, mostrando-se questionadores, investigativos, participativos e passando à posição de co-construtores de seus próprios conhecimentos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino e Aprendizagem. Proporcionalidade. Resolução de Problemas.

Abstract

The investigation registered in the present paper aims to analyse relevant aspects of a formative activity (minicourse) conducted with Mathematics on-the-job teachers and college students who searched new resources to develop the contents (objects of knowledge) with their students. Such experiment grounded the present research, of qualitative nature, whose data were collected through participant observation and document analysis. In that minicourse, the participants experienced Problem Solving as a Teaching and Learning Methodology to be developed in class work, and the covered content was Proportionality. The starting point was following the problem solving steps suggested by Allevato and Onuchic to promote a later discussion and reflection on the content, and at the end of the work, to formalize the new built concepts. During problem solving, it was possible to notice some signs of proportional thinking revealed by the participants. Besides, results show that they were mobilizing new resolution strategies by applying both quantitative thinking (involving numerical algorithms) and qualitative one (which analyses and explains the strategies used for resolution). Furthermore, they left the condition of listeners and started to question, investigate and participate, becoming co-builders of their own knowledge.

Keywords: Mathematics Education. Teaching and Learning. Proportionality. Problem Solving.

¹ Instituto Estadual de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IEMA) / Universidade Federal do Maranhão (UFMA) - manolopromat@hotmail.com - <https://orcid.org/0000-0002-8774-9633> - <http://lattes.cnpq.br/0292894699114273>

² Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL) - normallev@gmail.com - <https://orcid.org/0000-0001-6892-606X> - <http://lattes.cnpq.br/9614794595123496>

Introdução

Muitos são os fenômenos da realidade que podem ser descritos por modelos de proporcionalidade, por isso o apelo à utilização do raciocínio proporcional nas tarefas do dia a dia e na resolução de problemas relacionados ao cotidiano dos alunos, nos vários eixos temáticos da Matemática, como a Álgebra e a Geometria, e também em outras áreas do conhecimento, como a Química, por exemplo (Tinoco, 2011).

Sendo assim, o presente artigo relata o sucedido durante uma atividade formativa (minicurso) oferecida para professores em exercício e futuros professores de Matemática da Educação Básica (Ensinos Fundamental e Médio), que buscavam novas metodologias de ensino e aprendizagem para desenvolver os conteúdos (objetos de conhecimento) em suas aulas, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e de problemas envolvendo o conceito de proporcionalidade, em que foi possível (re)ver e (re)construir novos conhecimentos desse conteúdo³, com compreensão e significado.

O objetivo foi verificar como os participantes (professores e futuros professores de Matemática) percebiam a possibilidade de explorar o conceito de proporcionalidade na resolução de problemas. A partir desse estudo, buscamos, então, analisar aspectos relevantes a respeito do raciocínio proporcional que emergiu dessa experiência formativa.

O presente artigo está organizado em cinco seções principais além desta Introdução e das Considerações Finais. Iniciamos apresentando na primeira seção o contexto e a metodologia utilizada na pesquisa. Em seguida, abordamos o ensino de proporcionalidade na Educação Básica. A terceira seção trata da Resolução de Problemas e suas concepções no Ensino de Matemática. Na quarta seção, apresentamos a Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino e Aprendizagem nas aulas de Matemática. A quinta seção, intitulada “Ensino e Aprendizagem de Proporcionalidade centrados na Resolução de Problemas”, traz as descrições e discussões do problema desenvolvido no minicurso, que forneceu dados para este trabalho.

Contexto e Metodologia da Pesquisa

A presente pesquisa é de natureza qualitativa de cunho descritivo, realizada através da análise documental, ou seja, das resoluções escritas dos problemas (Helder, 2006) e da observação participante, realizada a partir do comportamento natural dos participantes durante as discussões e resoluções, em

³ A partir deste ponto, o termo conteúdo será utilizado de forma equivalente a objeto de conhecimento, conforme a nomenclatura adotada pela BNCC (Brasil, 2018).

que buscamos identificar aspectos relevantes e atitudes perante os problemas e o conteúdo em estudo. As observações foram registradas em um diário de campo (Fiorentini; Lorenzato, 2012).

Os dados foram coletados durante um minicurso cujo objetivo foi discutir o ensino e a aprendizagem de proporcionalidade centrados na Resolução de Problemas, com professores da Educação Básica (Ensinos Fundamental e Médio) e futuros professores (alunos do curso de licenciatura em Matemática), que buscavam novas formas de desenvolver os conteúdos matemáticos em sala de aula. Apresentamos três problemas em que os participantes teriam que utilizar o conceito de proporcionalidade para solucioná-los. No presente artigo, serão discutidos os registros escritos de resoluções de um dos problemas solucionados por eles e que constituem os dados desta pesquisa.

Para resguardar sua identidade, os participantes foram identificados como $P_1, P_2, \dots, P_{16}$. Assim, os pesquisadores foram os principais instrumentos, organizando e conduzindo as atividades, voltando sua atenção para os processos de resolução dos problemas, e não apenas para os resultados (Lüdke; André, 2017).

Ensino de Proporcionalidade na Educação Básica

A capacidade que os alunos possuem desde crianças de conceber a Matemática no seu dia a dia é que faz com que as conexões entre os vários conceitos matemáticos, entre os diferentes ramos da Matemática, entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, e entre a Matemática e as coisas e situações do cotidiano, tenham sentido. Por isso, “quando os alunos aprendem conceitos matemáticos isolados de um contexto, logo esquecem o seu significado. Quando aprendem Matemática ligada a situações do mundo real, ficam aptos a reconhecer e aplicar os conceitos em novas situações” (NCTM, 2007, p. 34).

A proporcionalidade é um dos conteúdos matemáticos com que mais nos deparamos no cotidiano, pois são frequentes as situações para as quais precisamos mobilizar processos que coloquem em prática as noções relacionadas a esse conceito. Ou seja,

O conceito de proporcionalidade está presente no dia a dia de qualquer pessoa, nas mais diversas situações: ao interpretar uma estatística ou gráfico, ao analisar uma planta de imóvel ou um mapa, ao estimar uma probabilidade, ampliar ou reduzir fotos, etc. (Tinoco, 2011, p. 9).

Dessa forma, ela é fundamental tanto no contexto escolar quanto no cotidiano das pessoas, por estar presente em diversas situações. Entretanto, apesar do contato frequente com situações de proporcionalidade, os alunos tendem a apresentar dificuldades em compreendê-la; ajudá-los a desenvolver o raciocínio proporcional tem sido um grande desafio escolar, sendo essencial, inclusive,

ao aprendizado de diversas disciplinas da Educação Básica, como Química, Física, Geografia, dentre outras (Tinoco, 2011).

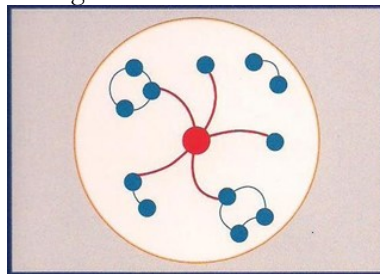
Também é importante enfatizar o papel da proporcionalidade como eixo de conexão entre os diversos ramos da Matemática, em que ela aparece em diferentes aspectos, ora em problemas envolvendo a Aritmética, como a regra de três, ora em problemas de Geometria, como o Teorema de Tales; contudo, é importante que se dê o tratamento adequado e integrado a todos esses temas, por meio da construção cuidadosa do conceito de proporção (Tinoco, 2011; Costa, 2012).

Por isso, ao defender essa ideia, Tinoco (2011) afirma que o mais importante, ao utilizar esse conceito, é que o aluno saiba o porquê de estar utilizando, construindo uma visão mais unificada da Matemática, em que os conteúdos não sejam tratados como matemáticas distintas, como geralmente acontece. Concordando com essas ideias, Maranhão e Machado (2011) afirmam que:

A proporcionalidade é um tema indubitavelmente importante em Matemática e outras Ciências em âmbito escolar, e em diversas situações da atividade humana. Por isso, o pensamento proporcional tem sido objeto de estudo em Educação Matemática e em suas especialidades, a Psicologia da Educação Matemática, há várias décadas (Maranhão; Machado, 2011, p. 142).

Assim, a proporcionalidade é considerada um eixo integrador entre os conteúdos matemáticos e em contextos que relacionam a Matemática a outras áreas do conhecimento. Através de um ensino que enfatize as inter-relações entre diversas ideias matemáticas, os alunos não só aprendem Matemática, como aprendem a reconhecer sua utilidade (NCTM, 2007). Dessa forma, quando os alunos conseguem estabelecer conexões entre ideias matemáticas, a sua compreensão é mais profunda e duradoura.

Figura 1: Eixo de conexão



Fonte: Van de Walle (2009, p. 43)

Na figura, os pontos azuis representam as ideias que os alunos já têm e que servem para construir uma nova ideia (ponto vermelho). Desenvolve-se, assim, uma rede de conexões entre elas. Portanto, quanto mais ideias forem usadas e mais conexões forem formadas, melhor será a compreensão do conteúdo (Van de Walle, 2009).

No entanto, os assuntos relacionados à proporcionalidade são tradicionalmente apresentados

aos alunos no 7º ano do Ensino Fundamental, e não raro são abordados de modo fragmentado, da seguinte forma: definição de razão; definição de proporção como igualdade de razões; propriedades das razões; grandezas diretamente proporcionais; grandezas inversamente proporcionais; regra de três; regra de três composta e juros simples, sem tratar das conexões entre outros conteúdos matemáticos (Costa, 2012; Costa *et al.*, 2023).

Em 1999, Izabella Oliveira e Marcelo Câmara Santos já nos chamavam a atenção para esse tipo de abordagem. Segundo os autores,

No Brasil, o estudo da proporcionalidade ocorre, muitas vezes, de uma maneira fragmentada, onde cada assunto do capítulo referente ao tema proporcionalidade é visto como objeto de estudo em si mesmo, provocando a transformação de ferramenta de resolução a objeto de estudos, o que ocorre, especificamente, com a regra de três (Oliveira; Santos, 1999, p. 2).

Embora já tenham decorrido mais de duas décadas dessa afirmação, ela ainda expressa uma realidade presente em contextos atuais. Ainda hoje, os alunos apresentam dificuldades de entendimento e uso do conceito de proporção como igualdade entre duas ou mais razões, apesar de já terem se deparado com situações bem mais simples, no início do Ensino Fundamental, que envolvem esse conceito. Daí a importância de se discutir a relação da construção do conceito de proporcionalidade com o desenvolvimento mental dos alunos; isso implica a necessidade de preparar esses alunos para uma atuação transformadora na realidade em que vivem (Tinoco, 2011).

Resolução de Problemas e suas Concepções no Ensino de Matemática

Apesar das várias alternativas para um trabalho diferenciado, ainda hoje há professores que ensinam Matemática considerando que os alunos aprendem unicamente pela repetição, ou seja, apresentam a Matemática formal a seus alunos e esperam que eles resolvam suas atividades nos moldes em que lhes foram ensinadas. No entanto, educadores matemáticos do Brasil e do mundo têm demonstrado uma preocupação em adequar o trabalho em sala às novas tendências metodológicas, que podem levar a melhores formas de ensinar e aprender Matemática (Allevato; Onuchic, 2021).

Portanto, “ensinar matemática tem sido, frequentemente, uma tarefa difícil. As dificuldades intrínsecas somam-se às decorrentes de uma visão distorcida da disciplina, estabelecida, muitas vezes, desde os primeiros contatos do professor com o aluno” (Maranhão, 2000, p. 37). Para tentar mudar esse cenário, Allevato e Onuchic (2021) indicam uma alternativa que seria fortalecer e aprimorar o trabalho com resolução de problemas em sala de aula, conferindo-lhe sua principal função, que é desenvolver a compreensão matemática dos alunos, considerando que a compreensão ou não de

determinadas ideias aparece quando se resolve um problema.

As autoras, ao apresentarem essa caracterização do ensino fundamentada na resolução de problemas para o currículo de Matemática, destacam três formas de se concebê-la em sala de aula, que consideram essenciais na configuração da abordagem que caracteriza a atividade de ensino do professor: ensinar **sobre** resolução de problemas; ensinar **para** a resolução de problemas; e ensinar **através** da resolução de problemas (grifo nosso). Essas abordagens já haviam sido observadas por Hatfield (1978) e ratificadas por Schroeder e Lester (1989).

Ensinar **sobre** resolução de problemas significa teorizar acerca da resolução de problemas, isto é, explicar estratégias e métodos para se obter a solução. Um importante representante dessa linha é George Polya (Morais; Onuchic, 2021). Percebe-se nessa abordagem um olhar ingênuo para a relação entre saber o conteúdo matemático e estar apto para resolver problemas, o que o autor define como sendo uma atividade humana fundamental, pois a maior parte de nosso pensamento consciente se relaciona com problemas (Polya, 2006). Ao ensinar **para** a resolução de problemas, o professor apresenta a Matemática “formal” e, em seguida, oferece aos alunos problemas ou exercícios como possibilidade de aplicação.

Nesse contexto, durante muito tempo, essa foi a prática mais comum nas aulas de Matemática e esteve fortemente presente nos livros didáticos (Costa, 2012; 2021), até que propostas pedagógicas mais recentes passaram a romper gradualmente com esse modelo, conferindo maior centralidade à resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem.

Em 1964, Luís Alberto S. Brasil, em seu livro intitulado “Estudo dirigido de matemática no ginásio”, já alertava a comunidade escolar para essa prática no ensino de Matemática.

Tradicionalmente, o problema é empregado pelos professores na verificação e na fixação da aprendizagem. Atentando, porém, para a história das ciências, notamos que o problema antecede invariavelmente as descobertas, é o provocador dos estudos e orientador das construções teóricas. Por que no ensino da matemática, especialmente, invertamos a ordem natural das coisas? (Brasil, 1964, p. 22).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) orienta que a aprendizagem matemática deve estar intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos. A par disso, várias habilidades indicadas pelo documento a serem desenvolvidas em Matemática são enunciadas como elaborar e resolver problemas.

Há muito tempo, a Resolução de Problemas tem sido um tópico presente nos currículos de Matemática. No entanto, ela tem experimentado um processo de (re)significação, de modo que novas formas de concebê-la têm sido consideradas e que levam a novas formas de trabalho em sala de aula (Onuchic; Allevato, 2009, p. 176).

Uma concepção bastante atual e indicada por Onuchic e Allevato (2009) como sendo um bom caminho para desenvolver os conteúdos em sala de aula seria a utilização da metodologia de ensino e aprendizagem de matemática **através da** resolução de problemas. Essa abordagem sinaliza para uma “nova” maneira de se conceber a resolução de problemas “[...] que se constitui num caminho para ensinar Matemática e não apenas para ensinar a resolver problemas. Tem como princípio de que o problema é um ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos” (p. 176). Assim, apresentaremos nas próximas seções aspectos da resolução de problemas enquanto Metodologia de Ensino e Aprendizagem nas aulas de Matemática.

Ensino e Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas

Discussões no campo da Educação Matemática buscam melhores formas de ensinar, aprender e avaliar a Matemática. Nos Estados Unidos, o NCTM já recomendava que a resolução de problemas deveria ser o foco da Matemática escolar para a década de 1980 (NCTM, 1980).

No Brasil, essa recomendação surgiu a partir do final da década de 1990, com a chegada dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1998), depois, nos documentos de orientações curriculares estaduais (Maranhão, 2007), e agora, no atual documento de referência curricular brasileiro, a BNCC (Brasil, 2018), que também vem sugerindo ações a serem praticadas no ensino de Matemática, dentre elas a resolução de problemas, que “constitui uma metodologia voltada para a utilização de conceitos matemáticos pelo educando, por meio de situações-problema que estimulem a curiosidade, a investigação, a descoberta, elaboração e (re)elaboração de conceitos que foram usados na solução do problema” (Maranhão, 2007, p. 123).

A partir daí, documentos oficiais como a BNCC (Brasil, 2018) e pesquisadores da Educação Matemática (Allevato; Onuchic, 2021) têm recomendado a Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem para ser desenvolvida em sala de aula. Nesse sentido, questionamos:

- Como os professores que estão em exercício e os futuros professores devem ensinar Matemática a seus alunos partindo da resolução de problemas?
- A Metodologia de Ensino e Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas seria uma opção?

Para ensinar Matemática partindo da resolução de problemas, é preciso criar um ambiente que motive e estimule os estudantes durante o desenvolvimento das aulas. Para que o professor obtenha êxito com o uso dessa metodologia de ensino e aprendizagem através da resolução de problemas, Allevato e Onuchic (2021) recomendam que os problemas sejam propostos de modo que os estudantes

possam se empenhar no “pensar sobre” e no desenvolvimento de importantes conceitos e procedimentos matemáticos.

– E o que vem a ser um problema matemático?

Esse questionamento é para nós o impulso para o desenvolvimento das atividades matemáticas em sala de aula e, conseqüentemente, para a construção do conhecimento pelo aluno. Sendo assim, dentre as diferentes concepções sobre o que é um problema matemático, optamos pela de Lourdes Onuchic; segundo a autora, um problema “[...] é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver”. A autora ainda esclarece que “[...] o problema não é um exercício no qual o aluno aplica de forma quase mecânica uma fórmula ou uma determinada técnica operatória” (Onuchic, 1999, p. 215).

Portanto, ensinar Matemática utilizando a Metodologia de Ensino e Aprendizagem através da Resolução de Problemas pode ser uma alternativa; contudo, não basta apresentar um problema ao aluno e “ficar sentado”, esperando que alguma mágica aconteça; o professor precisa criar e manter um ambiente motivador e estimulante em suas aulas.

Para usufruir melhor essa metodologia em sala de aula, Allevato e Onuchic (2021, grifo nosso) sugerem organizar as atividades seguindo as seguintes etapas:

1ª) **Preparação do problema** - Selecionar um problema (gerador) visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento de acordo com a série/ano de escolaridade do aluno;

2ª) **Leitura individual** - Entregar o problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura. Nessa etapa, a ação é do aluno, que irá ler o problema individualmente e desenvolver sua compreensão;

3ª) **Leitura em conjunto** - Solicitar nova leitura do problema, agora em pequenos grupos de alunos. Nesse momento, o professor ajuda os grupos de alunos na compreensão do problema, questionando e orientando em suas dúvidas;

4ª) **Resolução do problema** - Não havendo dúvidas quanto ao enunciado do problema, os alunos, em seus grupos, tentam resolver a situação que os conduzirá à construção do conhecimento referente ao conteúdo planejado pelo professor;

5ª) **Observar e incentivar** - Enquanto os alunos tentam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento deles e estimula o trabalho colaborativo. Como mediador, leva os alunos a pensarem, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias;

6ª) **Registro das resoluções na lousa** - Representantes dos grupos são convidados a registrar na lousa suas resoluções. Diante desse painel de soluções (certas, erradas, diferenciadas) o professor

estimula os alunos a compartilharem as ideias empregadas no momento da resolução do problema;

7ª) **Plenária** - Todos os alunos são convidados a discutir as diferentes resoluções registradas na lousa, defender seus pontos de vista e esclarecer suas dúvidas, além de comparar e discutir as diferentes resoluções e soluções;

8ª) **Busca do consenso** - Sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor com toda a classe tentam chegar a um consenso sobre o resultado correto. Nesse momento, ocorre o aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemática e a construção do saber matemático sobre o conteúdo envolvido no problema;

9ª) **Formalização do conteúdo** - Nessa etapa, o professor registra na lousa uma apresentação formal do conteúdo matemático, organizada e estruturada em linguagem matemática, padronizando conceitos, princípios e procedimentos construídos através da resolução do problema gerador, destacando diferentes técnicas de resolução;

10ª) **Proposição de novos problemas** - Na última etapa, o professor ou os próprios alunos propõem novos problemas relacionados ao problema gerador estudado em sala de aula, com o intuito de reforçar ou avaliar a aprendizagem pelos alunos após a formalização do conteúdo, ou mesmo de ampliar a aprendizagem, reiniciando o ciclo das dez etapas.

Reitere-se que esse roteiro (etapas) constitui apenas uma das possibilidades para o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos centrados na resolução de problemas. De acordo com Allevato e Onuchic (2021), não existe uma forma rígida para se trabalhar a Matemática através da resolução de problemas em sala de aula; o importante é que seja mantido o ponto central dessa Metodologia, que é partir de um problema gerador que tenha como objetivo a construção de um novo conceito e/ou conteúdo antes de apresentar sua teoria e a linguagem matemática formal, de acordo com o programa da disciplina para o ano/série escolar em que os estudantes se encontram, e que seja mais apropriado à resolução do problema proposto.

Nesse sentido, o ensino e a aprendizagem do tópico matemático começam com o problema, que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas que devem ser desenvolvidas na busca de solução ao problema. Nessa perspectiva em sintonia com essa forma de trabalho, Van de Walle (2009) recomenda a resolução de problemas como principal estratégia de ensino e aprendizagem, atentando para que o trabalho de ensinar comece onde estão os alunos, ao contrário de outras formas, em que o ensino começa onde estão os professores, ignorando o que os alunos trazem consigo para dentro da sala de aula. Para o autor, o valor de ensinar com resolução de problemas é grande e, embora difícil, há boas razões para o esforço do professor.

Ensino e Aprendizagem de Proporcionalidade Centrados na Resolução de Problemas

Nesta seção, apresentaremos uma das atividades desenvolvidas durante o minicurso, com o intuito de discutir a Resolução de Problemas como a Metodologia de Ensino e Aprendizagem nas aulas de Matemática. Antes de discutirmos essa metodologia de ensino e aprendizagem, solicitamos aos professores e licenciandos que resolvessem a situação a seguir (Quadro 1), cujo objetivo era desencadear processos de discussão e (re)construção de conhecimento acerca dos elementos que constituem o conceito de proporcionalidade, além de detectar os saberes matemáticos e as estratégias utilizadas pelos participantes em suas resoluções.

Quadro 1: Problema Gerador

A turma de um Curso de Licenciatura resolveu fazer uma “vaquinha” para dar um presente ao coordenador. Todos os alunos vão colaborar. Se o presente custar R\$ 2.000,00, cada aluno vai participar com R\$ 80,00. Se a turma escolher um presente de R\$ 3.500,00, com quanto deverá participar cada aluno?

Complete a tabela a seguir.

Preço do presente	Contribuição do aluno
2.000	80
1.000	
500	
3.500	

Agora responda:

- Que grandezas variam no problema?
- Essas grandezas são proporcionais? Por quê?
- Observe a tabela. Que número se mantém constante?
- O que esse número representa?

Fonte: Adaptado de Tinoco (2011)

Começamos com uma leitura individual do problema, seguida de uma leitura coletiva e esclarecimentos de eventuais dúvidas. Inicialmente, solicitamos aos participantes do minicurso que preenchessem a tabela de acordo com o enunciado. Nesse problema, os participantes tiveram poucas dúvidas em relação ao enunciado, pois foram feitos poucos questionamentos. Apenas um deles demonstrou ter dificuldade, principalmente em relação aos itens “c” e “d”; por isso, procuramos esclarecer suas dúvidas para que pudesse dar prosseguimento à resolução. Vale ressaltar que as resoluções partiram de seus conhecimentos prévios e antes de o conteúdo matemático ter sido discutido formalmente pelos formadores.

Lembramos que todos os problemas apresentados no minicurso foram resolvidos de acordo com as etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2021) para o trabalho com resolução de problemas em sala de aula. Entretanto, para essa atividade, pedimos aos participantes que resolvessem individualmente e, em seguida, discutissem suas resoluções em pequenos grupos para que pudessem chegar a um consenso em relação às respostas encontradas por eles.

A seguir, algumas das resoluções apresentadas pelos participantes:

Figura 2: Resposta apresentada por P₁

The image shows handwritten calculations and a table. On the left, there are calculations: $\frac{2000}{80} = \frac{1000}{y}$, $y = \frac{8 \cdot 1000}{20} = 40$, $\frac{3500}{140} = \frac{500}{z}$, $z = \frac{7 \cdot 500}{140} = 20$. In the center is a table with two columns: 'Preço do presente' and 'Contribuição do aluno'. The rows are: (2000, 80), (1000, 40), (500, 20), (3500, 140). On the right, there are more calculations: $\frac{2000}{80} = \frac{3500}{x}$, $x = \frac{4 \cdot 3500}{80} = 140$.

Preço do presente	Contribuição do aluno
2000	80
1000	40
500	20
3500	140

Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 3: Resposta apresentada por P₅

The image shows a table with two columns: 'Preço do presente' and 'Contribuição do aluno'. The rows are: (2000, 80), (1000, 40), (500, 20), (3500, 140). The values 40, 20, and 140 are handwritten in blue ink.

Preço do presente	Contribuição do aluno
2.000	80
1.000	40
500	20
3.500	140

Fonte: Dados da Pesquisa

Percebemos que para o preenchimento da tabela, o participante P₁ (Figura 2) utilizou uma estratégia diferente dos demais participantes, ou seja, ele partiu da igualdade entre duas razões para encontrar os valores desconhecidos, que chamou de x, y e z. Os demais participantes não apresentaram os cálculos de como encontraram os valores para o preenchimento da tabela, conforme podemos perceber no preenchimento feito por P₅ (Figura 3). Acreditamos que, por meio de uma divisão sucessiva por 2, P₅ tenha encontrado os valores da 2ª e 3ª parcelas. Para obter o valor da 4ª linha da tabela, ele pode ter somado esses valores anteriores (1ª, 2ª e 3ª linhas) ou simplesmente pode ter multiplicado o valor da 3ª linha por 7. De qualquer modo, esse participante, embora não tenha feito registro escrito do processo, realizou raciocínio proporcional.

P₁ utilizou o conceito de proporção, conforme podemos perceber no registro escrito por ele (Figura 2); no entanto, apresentou esse conceito em sua resolução de modo fragmentado, utilizando apenas as razões e a definição de proporção como igualdade de razões, sem fazer menção, em suas resoluções, ao fato de que se tratava de grandezas diretamente proporcionais, confirmando, assim, o

que apontam os estudos de Oliveira e Santos (1999) e de Tinoco (2011).

Após o preenchimento da tabela, questionamos: que grandezas variam no problema? Nesse item, encontramos respostas diferentes, e alguns participantes, até mesmo os professores que se encontram em exercício, tiveram dificuldades em identificar quais eram as grandezas envolvidas no problema, e alguns responderam:

(a) Se o preço do presente varia, a contribuição de cada aluno também varia.

Ressaltamos que, embora os participantes tenham preenchido a tabela corretamente, alguns deles, como podemos perceber na resposta apresentada acima, não relacionaram com o que lhes foi solicitado no item (a). Isso sugere que o registro feito na tabela não estava acompanhado da compreensão de quais eram as grandezas envolvidas no problema.

No item (b), o problema pergunta se as grandezas são proporcionais. Nesse item, percebemos que alguns participantes ainda apresentavam dificuldades em identificar uma proporção, ou seja, em compreender a relação existente entre duas grandezas diretamente proporcionais (que poderia ser expressa por uma função linear), conforme podemos observar nas respostas a seguir:

P₁ respondeu que sim, e justificou:

(b) Sim. Porque conforme aumenta o preço do presente, aumenta também a contribuição.

P₃ também respondeu que sim, justificando de forma bem semelhante.

b) sim, pois a medida que o preço do presente aumenta a contribuição aumenta e a medida que o preço diminui a contribuição também diminui.

Quando duas grandezas x e y são diretamente proporcionais, a razão y/x entre o valor de y e o valor correspondente de x é constante. Se o valor dessa constante é a , então $y/x = a$, ou seja, $y = a \cdot x$. Assim, dado o valor de x , para obtermos o valor correspondente de y , basta multiplicarmos x pela constante a . Então, dizemos que a expressão $y = a \cdot x$ define y como uma função linear de x .

Podemos observar também, pelas respostas apresentadas, que os participantes não conseguiram perceber a presença dessa constante na relação, ao afirmarem que “conforme aumenta o preço do presente, aumenta também o valor da contribuição”. Esse tipo de justificativa foi apresentada por todos os participantes, indicando que eles não tinham clareza em relação ao conceito de proporcionalidade. O fato de “uma grandeza aumentar enquanto a outra também aumenta” não é

condição suficiente para que ocorra proporcionalidade, conforme podemos observar no contraexemplo a seguir, referente aos preços de assinatura de uma determinada revista:

Quadro 2: Contraexemplo

Revista "Olhe Só"	
Duração (meses)	Preço (reais)
6	63,00
12	120,00

Fonte: Costa (2012, p. 160)

Nesse contraexemplo, as duas grandezas aumentam e não apresentam uma situação de proporcionalidade.

O problema apresentado trata de grandezas diretamente proporcionais, logo, existe uma constante multiplicativa na relação entre as duas grandezas. Por isso, solicitamos aos participantes que observassem a tabela preenchida e respondessem ao seguinte questionamento: Que número se mantém constante? Alguns participantes apresentaram dificuldade para responder a esse item. P₁ respondeu no item (b) que as grandezas do problema são proporcionais; no entanto, no item (c), em que foi questionado que número se mantém constante, ele respondeu que é:

(c) A quantidade de alunos que contribuem.

Esse participante apontou que o número representa a quantidade de alunos que contribuíram, não especificando o referido número. Apesar de terem sido esclarecidas as dúvidas antes de resolverem o problema, algumas ainda ficaram. Para P₅, o número que se mantém constante é o 2. As respostas apresentadas por P₁ e P₅ nos indicam que eles ainda não tinham clareza em relação a esse item. No entanto, vale ressaltar que a maioria dos participantes, mesmo tendo justificado de forma incompleta o item (b), identificaram corretamente o número constante.

Finalizamos a resolução do problema questionando no item (d) o que esse número que se mantém constante (item c) representa? Nesse item, as respostas foram bem diversificadas, conforme podemos observar nas respostas de P₁ e P₈ a seguir:

P₁ respondeu:

(d) Na função linear, $f(x) = ax + b$, ele representa a constante "b". Ou seja, ele representa o número que não varia.

Para P₈ o número que se mantém constante...

d) Representa uma referência, pela qual iremos seguir para determinar os outros valores que se pede.

Outras respostas foram observadas para esse questionamento. Um participante (P_2) indicou que esse número representa o valor mínimo do custo do presente. Outro (P_{10}) apontou como sendo a quantidade de pessoas entre as quais seria dividido o preço do presente, resultando na contribuição de cada um. As respostas sugerem que, de fato, os professores em exercício e os futuros professores ainda apresentavam dificuldade em “enxergar” que em situação envolvendo grandezas proporcionais existe uma constante. Essas dúvidas permaneceram até o momento da formalização, quando esses aspectos foram novamente discutidos pelos professores formadores.

Ao final da atividade (individual), solicitamos aos participantes que se reunissem em pequenos grupos, para que pudessem discutir entre eles as resoluções e soluções encontradas para os problemas. Durante a plenária, esses aspectos foram abordados: quando duas grandezas são, de fato, proporcionais; as estratégias ou formas de resolução (regra de três, divisões sucessivas, montagem de tabelas); que a relação entre grandezas proporcionais pode ser expressa por uma função linear do tipo $y = k.x$, em que $k \in \mathbb{R}^*$.

Considerações Finais

Ao apresentarmos a Metodologia de Ensino e Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas aos professores em exercício e aos futuros professores, confiamos que ela possa ser um caminho para fazer Matemática em sala de aula, capaz de despertar o entusiasmo dos alunos por seu aprendizado, realizado com compreensão e significado. Além disso, acreditamos que, quando um aluno entende o que faz ao resolver um problema, ele se percebe como alguém capaz de raciocinar por conta própria, buscando estratégias para resolvê-lo e construindo conhecimento. Contudo, para que isso ocorra, é necessário que o professor esteja preparado para assumir o papel de orientador (mediador) desse “novo” processo de ensino e aprendizagem.

Os participantes desta pesquisa perceberam maneiras de saírem dessa condição de “aprendizado”, libertando-se das formas “mecânicas” de ensinar e aprender, buscando novas maneiras de construir conhecimento e, conseqüentemente, o aprendizado, uma vez que eles já estão (ou estarão) atuando como professores. Entenderam que as atividades são centradas nos problemas, sendo estes o ponto de partida para o ensino e a aprendizagem de um determinado conteúdo.

Acreditamos que, a partir desta experiência, os participantes perceberam e entenderam que o uso dessa metodologia favorece um ambiente de aprendizagem onde o aluno se desenvolve ativamente e experimenta avanços na construção de seu próprio conhecimento. Além disso, perceberam também que a comunicação, a reflexão e o diálogo com os professores formadores e entre eles foram elementos

essenciais para uma melhor compreensão tanto do conteúdo em estudo (proporcionalidade), como da metodologia de ensino e aprendizagem utilizada no desenvolvimento das atividades. No entanto, ainda é necessário avançar mais, tentar redescobrir, ler, produzir e, sobretudo, acreditar.

Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: Por que através da Resolução de Problemas? *In*: ONUCHIC, L. R. *et al.* (Org). **Resolução de Problemas: teoria e prática**. 2. ed. Jundiaí, SP: Paco Editorial, 2021, p. 37-57.

BRASIL, L. A. S. **Estudo Dirigido de Matemática no Ginásio**. São Paulo: Fundo de Cultura, 1964.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <https://www.basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 10 abr. 2024.

COSTA, M. S. **Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Proporcionalidade Através da Resolução de Problemas**: uma experiência na formação inicial de (futuros) professores de matemática. 292 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2012.

COSTA, M. S. Um panorama da resolução de problemas na visão das pesquisadoras brasileiras Onuchic e Allevato. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, Brasil, v. 7, n. especial, p. e4006, 2021. Disponível em: <https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/5489>. Acesso em: 10 set. 2024.

COSTA, M. S. *et al.* Resolução de problemas: estratégia para ensinar, aprender e avaliar o conteúdo proporcionalidade na educação de jovens e adultos. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 12, n. 27, p. 76–99, 2023. Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/7238>. Acesso em: 5 out. 2024.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. revisada. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

HATFIELD, L. L. Heuristical emphasis in the instruction of mathematical problem solving: rationales and research. *In*: HATFIELD, L. L.; BRADBARD, D. A. (Org). **Mathematical problem solving**: papers from a research workshop. Columbus: ERIC, 1978.

HELDER, R. **Como fazer análise documental**. Porto: Universidade de Algarve, 2006.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. 2. ed. [Reimpressão]. Rio de Janeiro: E. P. U., 2017.

MARANHÃO (Estado). Secretaria de Estado da Educação. **Proposta curricular do estado do maranhão: matemática**: ensino fundamental: 5ª a 8ª série. São Luís, 2000.

MARANHÃO (Estado). Secretaria de Estado da Educação. Secretaria Adjunta de Ensino. **Referenciais Curriculares**: Ensino Médio - Matemática. São Luís, 2007.

MARANHÃO, C.; MACHADO, S. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revistas**, n. 1, p. 141-156, 2011.

MORAIS, R. S.; ONUCHIC, L. R. Uma Abordagem Histórica da Resolução de Problemas. *In*: ONUCHIC, L. R. *et al.* (Org). **Resolução de Problemas**: teoria e prática. 2. ed. Jundiaí, SP: Paco Editorial, 2021, p. 19-36.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **An agenda for action: recommendations for school mathematics for the 1980s**. Reston: NCTM, 1980. Disponível em: <http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=17278>. Acesso em: 25 abr. 2024.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Princípios e normas para a matemática escolar**. Lisboa: APM, 2007.

OLIVEIRA, I. A. F. G.; SANTOS, M. C. Problemas de proporção: uma análise da apropriação do seu significado. *In*: IV Encontro Pernambucano de Educação Matemática – EPEM, 1999. **Anais** [...]. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 1999.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Formação de Professores – Mudanças Urgentes na Licenciatura em Matemática. *In*: FROTA, M. C. R.; NASSE, L. (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009, p. 169-187.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. *In*: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Org.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989.

TINOCO, L. A. A. **Razões e proporções**. Rio de Janeiro: Projeto Fundação, Instituto de Matemática/UFRJ, 2011.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.