

VAN HIELE E VERGNAUD: ARTICULAÇÃO PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

VAN HIELE AND VERGNAUD: ARTICULATION FOR TEACHING GEOMETRY

Rudinei Alves dos Santos¹ 
Francisco Hermes Santos da Silva² 

Resumo

O processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos requer domínio técnico e fundamentação acerca de teorias de aprendizagem que auxiliem no (re)direcionamento de ações que favoreçam o desenvolvimento do conhecimento. Assim, este artigo, recorte de uma pesquisa de doutorado, objetivou discutir características do Modelo do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de van Hiele (MVH) e da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) que aproximem e conduzam essas teorias à complementaridade, capaz de oportunizar ação reflexiva do professor e contribuir para o processo de elaboração de conceitos geométricos. Este artigo, construído a partir de uma abordagem qualitativa, aos moldes de uma pesquisa de cunho bibliográfico, possui como arcabouço teórico as teorias supracitadas e mostrou-se frutífero, pois indica possível complementaridade em práticas docentes, nas quais as teorias auxiliam desde a seleção de situações até a análise dos registros dos alunos. O MVH, sobretudo, auxilia na adequação das situações e na postura do professor; já a TCC, principalmente, contribui para a análise dos invariantes operatórios evocados pelos alunos em ação. Outrossim, essa complementaridade potencializa a avaliação, pois auxilia o professor ao longo do processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Situações. Desenvolvimento Geométrico. Invariantes Operatórios.

Abstract

The teaching and learning process of mathematical concepts requires technical knowledge and a theoretical foundation based on learning theories that support the (re)direction of actions that foster the development of knowledge. Thus, this article, which is part of a doctoral research study, aimed to discuss characteristics of the van Hiele Model of Geometric Thinking Development (VHM) and the Theory of Conceptual Fields (TFC) that bring these theories closer together and lead them toward complementarity, capable of fostering teachers' reflective action and contributing to the process of developing geometric concepts. This article, based on a qualitative approach and bibliographic research, is grounded in the aforementioned theories and proved fruitful, as it indicates possible complementarity in teaching practices, in which the theories assist from the selection of situations to the analysis of students' records. The VHM, above all, assists in the adequacy of situations and the teacher's approach, whereas CFT mainly contributes to the analysis of the operational invariants evoked by students in action. Furthermore, this complementarity enhances assessment, as it supports teachers throughout the teaching and learning process.

Key words: Situations; Geometric Development; Operative Invariants.

¹ Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará – IFPA - rudinei.alves@ifpa.edu.br - <https://orcid.org/0000-0001-6214-3726> - <http://lattes.cnpq.br/9365709399373081>

² Universidade Federal do Pará – UFPA - fhermes@ufpa.br - <https://orcid.org/0000-0002-2693-1968> - <http://lattes.cnpq.br/3912906225739008>. *In memoriam* – Este artigo também representa o legado acadêmico do Professor Francisco Hermes, falecido antes de sua publicação.

INTRODUÇÃO

A ação docente, em particular a do professor de matemática, é permeada por diversas influências advindas das práticas vivenciadas quando aluno, ou em contato com outros colegas de profissão, além do conhecimento teórico acerca das teorias de aprendizagem que, talvez, tenha estudado em sua formação acadêmica. Por conseguinte, diante de toda essa pluralidade de saberes teóricos e práticos, não é razoável, sem investigação, invalidar articulações entre teorias que têm em comum o interesse pelo processo de ensino e aprendizagem. Especialmente quando são teorias que discorrem sobre a construção de conceitos matemáticos.

Logo, com o intuito de ofertar ensino de geometria que valorize os conhecimentos prévios e possibilite a interação entre todos os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, emerge a questão central desta pesquisa: que contribuições para o processo de ensino e aprendizagem podem advir da articulação entre o Modelo do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de van Hiele (MVH) e a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud? O MVH, como também ficou conhecida a primeira teoria presente na questão de pesquisa, segundo Keleff *et al.* (1994, p. 24), é um “guia para aprendizagem e para avaliação das habilidades dos alunos em geometria” e a TCC, segundo Campos *et al.* (2007, p. 224), “fornece elementos para a análise das dificuldades dos estudantes e constitui uma ferramenta poderosa para a construção de situações-problema”.

Frente à questão de pesquisa, este estudo objetiva discutir características do MVH e da TCC que aproximem e conduzam essas teorias à complementaridade, capaz de oportunizar ação reflexiva do professor e, assim, contribuir para o processo de conceitualização de conceitos geométricos. Este artigo é um recorte de uma pesquisa de doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática – PPGECEM, da Rede Amazônica de Educação em Ciências – REAMEC, fruto de uma abordagem qualitativa, embasado numa investigação de cunho bibliográfico, considerando que esta foi “desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos” (GIL, 1991, p. 48), com o intuito de obter fundamentação teórica para a pesquisa.

Nas duas próximas seções serão apresentados: o MVH e a TCC. Em seguida, abre-se uma seção intitulada “Superando Divergências” que busca estabelecer diálogo entre as teorias apresentadas nas duas seções anteriores. Depois, encontra-se a seção “Complementaridade à Vista” que discorre sobre a aproximação entre as teorias que compõem o arcabouço teórico desta pesquisa, a qual pode ter reflexos na prática do professor. Finalmente, na última seção encontram-se as considerações finais.

O MODELO DE VAN HIELE (MVH)

Essa teoria tem origem nas teses de doutorado do casal de professores holandeses, Pierre van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geldof, em 1957. Segundo Corberán Salvador *et al.* (2014, p. 83), “formularam sua teoria caracterizando uma hierarquia de níveis cujo trânsito ordenado facilita uma possível didática”. Os níveis são os seguintes: Nível 0 – Visualização; Nível 1 – Análise; Nível 2 – Dedução Informal ou Abstração; Nível 3 – Dedução Formal; Nível 4 – Rigor. Machado (2011) destaca que o MVH é organizado por níveis de conhecimento e de fases do aprendizado que devem ser respeitados para o aluno elevar seu nível de conhecimento. Brandão (2010, p. 31) afirma que “a teoria de van Hiele sugere que o pensamento geométrico evolui de modo lento desde as formas iniciais de pensamento até as formas dedutivas finais onde a intuição e a dedução se vão articulando”.

O aluno submetido ao MVH segue uma sequência ordenada de experiências educacionais que pode conduzi-lo à aquisição do conhecimento geométrico, sendo necessário passar por todos os cinco níveis de compreensão e as cinco fases de aprendizado sequenciais que compõem cada um dos níveis. Essas fases são intituladas: Fase 1 – Questionamento ou Informação; Fase 2 – Orientação Direta; Fase 3 – Explicitação; Fase 4 – Orientação Livre; e Fase 5 – Integração. Além dos níveis e fases, o modelo conta com cinco propriedades que podem auxiliar o professor durante o processo de ensino e aprendizagem. As propriedades são as seguintes: Hierarquia; Linguística; Intrínseco e Extrínseco; Avanço; e Desnível.

“Os níveis descrevem como pensamos e quais os tipos de ideias geométricas sobre as quais pensamos mais do que a quantidade de conhecimento ou de informação que temos a cada nível” (VAN DE WALLE, 2009, p. 440). Esses níveis devem ser construídos com atividades que valorizem experiências educacionais concretas e adequadas ao nível em que o aluno se encontra. Machado (2011, p. 57-58) salienta a necessidade de “perceber, na escalada dos níveis, a crescente complexidade do objeto concreto: dos elementos básicos passou-se às suas propriedades, às relações entre propriedades, às cadeias de propriedades e às propriedades das cadeias”. Veja o Quadro 1 com a síntese dos cinco níveis.

Quadro 1 – Níveis do Modelo de van Hiele

Níveis de Compreensão	
Nível 0: Visualização	O aluno inicia a percepção do universo que o rodeia. Reconhece os objetos geométricos apenas por sua aparência global, formas naturais e/ou artificiais, sem conseguir perceber propriedades.
Nível 1: Análise	O aluno reconhece partes dos objetos que começam a ser identificados e analisados. Não consegue relacionar classes de objetos, mas percebe que

	algumas características são inerentes a certos conjuntos de objetos.
Nível 2: Dedução Informal	O aluno reconhece classes de objetos, estabelecendo relações de propriedades entre objetos. Também é capaz de deduzir propriedades, contudo, não é capaz de realizar demonstrações.
Nível 3: Dedução Formal	O aluno é capaz de realizar demonstrações que envolvem conceitos formais relacionados a teoria geométrica, além de visualizar outras possibilidades de realizá-las.
Nível 4: Rigor	O aluno trabalha com geometria não euclidiana. As abordagens se passam em plano puramente abstrato, sendo necessário submeter o processo dedutivo a um sistema de avaliação bastante rigoroso.

Fonte: Construção do autor

Em cada nível existem as mesmas cinco Fases do Aprendizado que visam auxiliar o professor a desenvolver o modelo e contribuem para que o aluno supere seus níveis de compreensão. Pastor (1993) esclarece que essas fases objetivam organizar a atividade proposta aos alunos, e ao finalizarem o percurso ordenado por elas devem alcançar o nível imediatamente superior. Veja o Quadro 2 com a síntese dessas fases.

Quadro 2 – Fases do Modelo de van Hiele

Fases do Aprendizado	
Fase 1: Questionamento ou Informação	O professor estabelece diálogo com seu aluno e através de perguntas, elaboradas com a linguagem adequada ao nível, conduz a exploração do objeto de estudo.
Fase 2: Orientação Direta	O professor guia de forma criteriosa e sequencial as ações dos alunos, por meio das tarefas selecionadas. Assim, o aluno pode tomar consciência das características do nível.
Fase 3: Explicitação	O professor orienta e fomenta discussão entre os alunos acerca do objeto de estudo, dando ênfase as propriedades e as relações estabelecidas nas resoluções executadas, destacando a importância do uso de linguagem adequada ao nível.
Fase 4: Orientação Livre	O professor propõe atividades mais complexas, explorando conceitos abordados anteriormente e que possibilitem o uso de estratégias autônomas e distintas das já apresentadas.
Fase 5: Integração	O professor auxilia o aluno na construção de síntese acerca do estudo, com cuidado de não introduzir novos conceitos. Ocorre a sistematização do conhecimento abordado nas fases anteriores.

Fonte: Elaborado pelos autores

Já as propriedades do Modelo são inerentes à prática do professor, auxiliando na tomada de decisões durante o processo de ensino. Corberán Salvador *et al.* (2014) sublinha que as propriedades apontadas pelos van Hieles, além de caracterizarem a teoria, são importantes para a

prática do professor, pois disponibilizam uma espécie de orientação que pode ser seguida para a instrução dos alunos durante as execuções das situações. A seguir, no Quadro 3, encontra-se a síntese dessas propriedades.

Quadro 3 – Propriedades do Modelo de van Hiele

Propriedades do Modelo	
Hierarquia	O aluno deve passar, de forma sucessiva e ordenada, pelos níveis. Sendo que o sucesso em dado nível está condicionado a aquisição dos conhecimentos abordados nos níveis anteriores.
Linguística	Por ser um método sequencial, cada nível possui características próprias que satisfazem as necessidades conceituais do nível. É fundamental o uso de linguagem adequada, precisa e inerente a cada nível.
Intrínseco e Extrínseco	Um nível tem como pré-requisito o nível imediatamente anterior. Existe um aprofundamento progressivo e sequencial do conhecimento estudado, à medida que os níveis são percorridos.
Avanço	A superação de um nível está mais associada ao conteúdo e aos métodos de orientação adotados para o direcionamento do aluno, do que em relação a idade.
Desnível	Todos os recursos didáticos e orientações devem estar no mesmo nível de compreensão do aluno, caso contrário o aprendizado e a evolução esperada não serão atingidos de forma satisfatória.

Fonte: Construção do Autor

Ante o exposto, a estrutura do MVH, com seus Níveis de Compreensão, Fases do Aprendizado e com as Propriedades, possibilita ao professor uma visão global do processo que está conduzindo, favorecendo a interação e permitindo alcançar seus objetivos de forma mais organizada.

A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS (TCC)

Essa teoria apresenta-se como um referencial para estudos que visem compreender o desenvolvimento cognitivo de sujeitos envolvidos em situações complexas. A TCC, idealizada pelo Dr. Gérard Vergnaud, inicialmente interessado pelos campos conceituais da adição e da multiplicação, extrapolou esses campos. Bittar (2009, p. 53) destaca que “a riqueza dessa teoria não se limita a um determinado domínio matemático e nem mesmo somente à Matemática”.

O primeiro conceito proeminente na TCC é o de “campo conceitual” e Vergnaud (1981, p. 217) o define dizendo que se trata de “um espaço de problemas ou situações-problema cujo tratamento envolve conceitos e procedimentos de vários tipos em estreita conexão”. Então, um

campo conceitual reúne um conjunto de situações agrupadas em classes de situações, cujo domínio remete à construção de uma variedade de conceitos e representações simbólicas em estrita relação, evocados por classes de situações. Diante do exposto e a partir da prática docente, verifica-se que um conceito não é plenamente adquirido em um curto espaço de tempo, fazendo-se necessário um longo tempo e uma variedade de situações que, exploradas, esclarecerão os conceitos envolvidos.

Assim, Vergnaud (2009) ratifica que apenas uma situação não é capaz de conduzir o aluno à compreensão de um conceito, da mesma forma que um único conceito não é capaz de conduzir o aluno à solução de uma situação. Vergnaud (1986), ao argumentar sobre a necessidade de uma diversidade de situações, procedimentos e representações simbólicas que envolvem a construção de um conceito, afirma que essa diversidade o levou a desenvolver estudo sobre campo conceitual. Além disso, diz que

Um conceito pode ser definido, com efeito, como um triplete de três conjuntos (S, I, L):
S: o conjunto de situações que dão sentido ao conceito;
I: o conjunto de invariantes que constituem as diferentes propriedades do conceito;
L: o conjunto das representações simbólicas que podem ser utilizadas.
(VERGNAUD, 1986, p.83)

A TCC aponta a necessária harmonia entre os três conjuntos apresentados, para a aquisição e desenvolvimento de um conceito, além da atenção e comprometimento do professor durante o processo de ensino e aprendizagem, pois sem a construção e a exploração de categorias de situações, capazes de conduzir o aluno durante todo o processo de ensino e aprendizagem, o conceito não será compreendido. Desta forma, a elaboração e a seleção de situações é um ato de mediação de grande importância para TCC, sendo o Conjunto das Situações aquele que possibilita ao aluno uma melhor visualização do conceito estudado e constitui a forma coerente de adentrar em um campo conceitual. Isto posto, “as situações que dão sentido aos objetos que caracterizamos como conceitos e, portanto, são as situações que geram a construção de conceitos - coisas que rotulam, por exemplo, os objetos” (PALMERO; MOREIRA, 2004, p. 17).

O aluno em ação sobre situações inicia o processo de adaptação e de construção de seus esquemas. Esquema que, para Magina *et al.* (2001), é a organização dos invariantes de ação, assumida por uma pessoa ao ser envolvida por um conjunto de situações de uma mesma classe. Nesse processo, o aluno depara-se, de forma consciente ou inconsciente, com conceitos e com teoremas implícitos que, por impulsionarem ações que desenvolvem as situações, são chamados por Vergnaud (2009) de invariantes operatórios: conceitos-em-ação e teoremas-em-ação e por Magina *et al.* (2001) de invariantes de ação. Sobre esses invariantes, Muniz (2009, p. 48) diz que

“são os conceitos em ato que permitem ao sujeito selecionar e tomar informações consideradas como as relevantes para produção de uma solução de acordo com seus objetivos, assim como selecionar os teoremas em ato necessários à realização dos cálculos”.

Salienta-se que apesar de alguns autores, tratarem os invariantes operatórios como “conceito-em-ação” e “teorema-em-ação” e outros como “conceitos em ato” e “teorema em ato”, são apenas variantes da representação escrita do mesmo conceito. O importante é que o professor precisa buscar constantemente o afloramento desses conceitos e teoremas implícitos, a fim de transformá-los em verdadeiros conceitos e teoremas matemáticos. Vergnaud (1990) compara o conjunto de conceitos envolvidos no processo de conceitualização a um iceberg, do qual se pode ver apenas uma pequena parcela, em comparação com a parte submersa. Essa imensa parcela submersa, que representa os invariantes operatórios, sustenta a parte visível que não poderia ser vista, caso não existisse a parte oculta, os conceitos implícitos. Logo, sem os conceitos ocultos, os revelados não seriam nada.

Ante o exposto, percebe-se a importância do Conjunto das Representações Linguísticas e Simbólicas, pois são elas que permitem ao aluno externar o seu pensamento elaborado quando imerso em um determinado campo conceitual. “Na aquisição das matemáticas, os diagramas, os esquemas, as tabelas, bem como outras formas de representação ocupam um lugar importante ao lado da linguagem natural que conserva um lugar privilegiado” (LEVAIN, 1997, p. 57). Ademais, durante a resolução de situações, é possível identificar que o aluno também externa seu pensamento recorrendo a gestos, percebidos nas interações entre alunos e professor.

A TCC evidencia a necessária imersão do aluno em situações que favoreçam a eclosão de conceitos, a serem tangenciados por meio de adaptações e construções de esquemas que, lentamente, emergem do pensamento do aluno, em forma de representações linguísticas e simbólicas que, com a mediação do professor, podem levar à cientificidade desses conhecimentos. Outrossim, aponta para a importância de se valorizar o conhecimento prévio do aluno.

SUPERANDO DIVERGÊNCIAS

Vergnaud (1981) e o casal Van Hiele (1957) compartilham interesse pelo processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Assim, considera-se o espaço escolar um cenário de convergência de suas teorias: Modelo de van Hiele (MVH) e Teoria dos Campos Conceituais (TCC), pois ambas analisam esse processo voltando-se para alunos envolvidos em situações que abarcam conceitos matemáticos em construção.

Salienta-se que, para aceitar diálogo entre teorias de aprendizagem, é preciso considerar o espaço escolar um local democrático, em que práticas e teorias diversas possam se aproximar e

conduzir debates que contribuam para a construção do conhecimento. Essas aproximações podem enriquecer o processo, pois são conhecimentos construídos a partir de perspectivas distintas, podendo auxiliar no maior envolvimento de alunos e professores. Nessa perspectiva, é inadmissível aceitar a existência de uma rainha das teorias que bloqueie o acesso e as contribuições de outra, potencialmente capaz de auxiliar no processo de ensino e aprendizagem.

Moreira (2012, p. 63) alerta que “no ensino, deve-se utilizar distintos materiais instrucionais e diferentes estratégias didáticas, estimulando a participação do aluno”. Assim, ratifica-se a necessidade do professor dialogar de forma plural com teorias de aprendizagem. Isto posto, é importante aproximar teorias, inclusive aquelas aparentemente dicotômicas, para verificar se são capazes de coabitar o espaço escolar, a fim de somarem esforços no sentido de conduzirem à aquisição de conceitos.

À vista disso e respeitando-se os marcos teóricos das teorias, por que não vislumbrar uma proposta de abordagem na qual sejam exploradas características da TCC e do MVH, que torne possível a construção de ações para o ensino e aprendizagem de conceitos do campo conceitual da geometria? Neste trabalho, não se propõe a enunciação de uma teoria híbrida, mas um estudo que recorre a ambas as teorias, no qual irão corroborar para a construção das situações ajustadas aos níveis de compreensão geométrica do aluno, mediação e análise do processo de conceitualização que ocorre dentro de um campo conceitual da geometria.

Então, recorre-se à teoria proposta pelo casal van Hiele e a teoria construída por Gérard Vergnaud com o intuito de identificar complementaridade entre elas e contribuir com o processo de conceitualização de conceitos geométricos. A opção pelo MVH se deve à proposta de hierarquização dos níveis de compreensão do conhecimento geométrico, que descreve quais os tipos de atividades são adequados a cada nível de compreensão, além de orientações que podem contribuir com a mediação do professor. Optou-se por Gérard Vergnaud devido a seu interesse pelo desenvolvimento das estruturas mentais, em particular, por olhar para o sujeito em ação sobre situações que levam à evocação de esquemas capazes de mostrar como ocorre a organização das atividades.

A TCC apresenta-se como uma teoria cognitivista que visa, segundo Vergnaud (1990, p. 1), “proporcionar uma estrutura coerente e alguns princípios básicos para o estudo do desenvolvimento e aprendizagem de competências complexas, especialmente aquelas que se referem à ciência e tecnologia”. Vergnaud se interessa pelo desenvolvimento das estruturas mentais do sujeito em ação sobre situações que levam à evocação de esquemas capazes de mostrar como ocorre a organização das atividades. Vergnaud (2009), ao reconhecer a relevância dos estudos de

Piaget nessa área, por ser Piaget o precursor dos estudos do conteúdo cognitivo da atividade, afirma no prefácio do livro “A criança, a matemática e a realidade” que,

Na verdade, a forma operatória do conhecimento é a fonte e o critério desse conhecimento:

- Fonte porque é tão somente em situação que os processos de assimilação e acomodação são colocados em ação, e porque o que primeiro se adapta são os esquemas;
- Critério porque um conhecimento que não é operatório não é, de fato, um conhecimento. Na matemática não faltam exemplos de que um teorema pode ser formulado pelos alunos sem que estes saibam empregá-lo em uma situação (VERGNAUD, 2009, p. 11).

Vergnaud (2009), ao ressaltar a importância do conjunto de situações em sua teoria, evoca dois processos cognitivos piagetianos que se complementam. O processo que classifica novos eventos em um esquema preexistente, chamado de assimilação, e o processo de acomodação que permite a criação de novos esquemas, ou a modificação de esquemas já existentes. Acerca da importância das situações, Pierre van Hiele (1957) diz que,

uma criança tem compreensão em um determinado campo da geometria quando, a partir dos dados geométricos e das relações que lhe são fornecidas, consegue chegar a uma conclusão em uma situação que nunca enfrentou antes (PIERRE VAN HIELE, 1957, p.1).

Percebe-se que, em ambas as teorias, o aluno é envolvido por situações e precisa articular conhecimentos construídos a partir de suas experiências para efetivação do processo de aprendizagem. Apesar disso, não se nega que Pierre van Hiele (1957), enquanto apoiador da Gestalt, entende que o conhecimento vem da percepção, não aceitando que parte do pensamento pode formar-se no inconsciente do aluno, diferentemente de Vergnaud (2009), pois este admite que uma grande parcela dos conceitos, efetivamente usados na ação, o aluno não consegue explicitar de forma consciente. Logo, pensamentos construídos no inconsciente do aluno. Mesmo assim, a importância atribuída à situação não se anula pela divergência existente entre os modos como essas teorias compreendem o processo de conceitualização. Então, pode-se lançar mão de ambas para construir situações e analisar os registros produzidos pelos alunos em ação.

Sobre a questão do conhecimento ser critério, percebe-se na última citação de Pierre van Hiele (1957) que a situação em seu modelo também pode ser vista como critério, pois destacou que o aluno precisa resolver uma situação para se admitir que houve compreensão, fato que conduz a mais um ponto de aproximação entre as teorias. Além disso, sobre o conhecimento ser critério, Vergnaud (2009) leva à reflexão de um bom exemplo acerca do estudo de um teorema que mostra a necessidade de repensar o processo de ensino e aprendizagem.

Trata-se do “Teorema de Pitágoras”, que é apresentado a alunos do 7º ano e, anos mais tarde, causa frustrações a muitos alunos e professores, pois apesar de ter sido exaustivamente repetido por um longo período em sala de aula até a sua memorização, não conduz a ações sobre as situações, evidenciando que a TCC pode auxiliar fortemente no processo de aprendizagem, uma vez que conduz o leitor ao entendimento de como o sujeito aprende conceitos complexos. Ademais, o MVH poderia contribuir com a elaboração de um conjunto de situações que abordasse o teorema estudado, respeitando o nível de compreensão dos alunos envolvidos.

A possibilidade de organização das situações por nível se deve ao fato do MVH possuir estágios com características bem definidas e que se desenvolvem de forma sequencial e ordenada, propondo que os níveis evoluem através das atividades planejadas de acordo com as fases do modelo e da orientação, consciente do professor, que contribuem para o desenvolvimento de *insight*³ que pode ser interpretado como o momento em que ocorreu a compreensão. Nesse sentido, Costa (2000, p. 165) salienta que “Van Hiele sugira que, na ausência de ensino sistemático, as oportunidades das crianças desenvolverem a matemática do espaço enfraquecem, e, para muitos, extinguem-se mesmo”.

Em vista disso, o MVH firma-se como uma teoria capaz de mostrar ao professor como melhor abordar os conceitos do campo conceitual da geometria, além de direcionamentos acerca de como envolver o aluno nas situações propostas. Na visão de Moura (2018, p. 53), o MVH considera o aluno um sujeito ativo do processo, pois “participa das aulas e obtém um desenvolvimento melhor para a aprendizagem geométrica, haja vista que o modelo auxilia o professor na tomada de decisão do que ensinar e por onde começar a ensinar”.

Nesse contexto, perante uma teoria que trouxe grande contribuição para a didática do ensino da geometria e outra com relevante estudo acerca do desenvolvimento cognitivo do aluno em ação, busca-se explorar duas teorias que possuem potencial de se complementarem, devido a contribuírem para a abordagem dos lados de uma mesma moeda, chamada de processo de ensino e aprendizagem. Por um lado, figura-se o MVH, fundamental para orientar na seleção e desenvolvimento do processo de ensino do campo conceitual da geometria, e, por outro, a TCC, que permite ao professor entender como o aluno constrói os complexos conceitos da matemática.

³ Segundo Kaleff *et al.* (1994, p. 1), o casal Van Hiele admite que uma pessoa mostra *insight* quando: “(a) é capaz de se desempenhar numa possível situação não usual; (b) desenvolve corretamente e adequadamente as ações requeridas pela situação; (c) desenvolve deliberadamente e conscientemente um método que resolva a situação”.

COMPLEMENTARIDADE À VISTA

Dina van Hiele-Geldof (1957), no resumo de sua tese, lista dezessete princípios para o ensino de Geometria. No terceiro, a autora afirma que “é importante para a formação de conceitos utilizar esquemas pertencentes à estrutura do pensamento formado durante o período de estruturação do processo de aprendizagem”. Enquanto Pierre van Hiele (1957), em sua tese, ao destacar que compreensão e situação de aprendizagem precisam estar sempre associadas, afirma que

A pessoa se encontra em um processo de aprendizagem e, depois de um certo tempo, é capaz de agir de forma adequada em situações que ainda não haviam surgido em seu processo de aprendizagem. Diz-se, então, que agiu com base na compreensão que adquiriu durante a aprendizagem (VAN HIELE, 1957, p. 3).

Os autores do MVH explicitam a importância da construção dos conceitos ancorados em conceitos construídos anteriormente através das experiências vivenciadas, por meio do envolvimento dos alunos com situações de um campo da geometria. Esses conhecimentos prévios, para serem acionados, devem estar previamente presentes no pensamento e, uma vez acionados, precisam de uma estrutura que os organize. Dina van Hiele (1957) chama tal estrutura de esquema, que, independentemente de ter partido de um gestaltista ou piagetiano, reúne de forma organizada os conceitos compreendidos pelo aluno. Organização que pode levar a resolução de situações de outras classes do campo conceitual em estudo. Sendo assim, considera-se que o interesse pelo processo de organização dos conceitos em esquemas mentais é uma característica comum entre o MVH e a TCC, assim como a relevância do conjunto de situações.

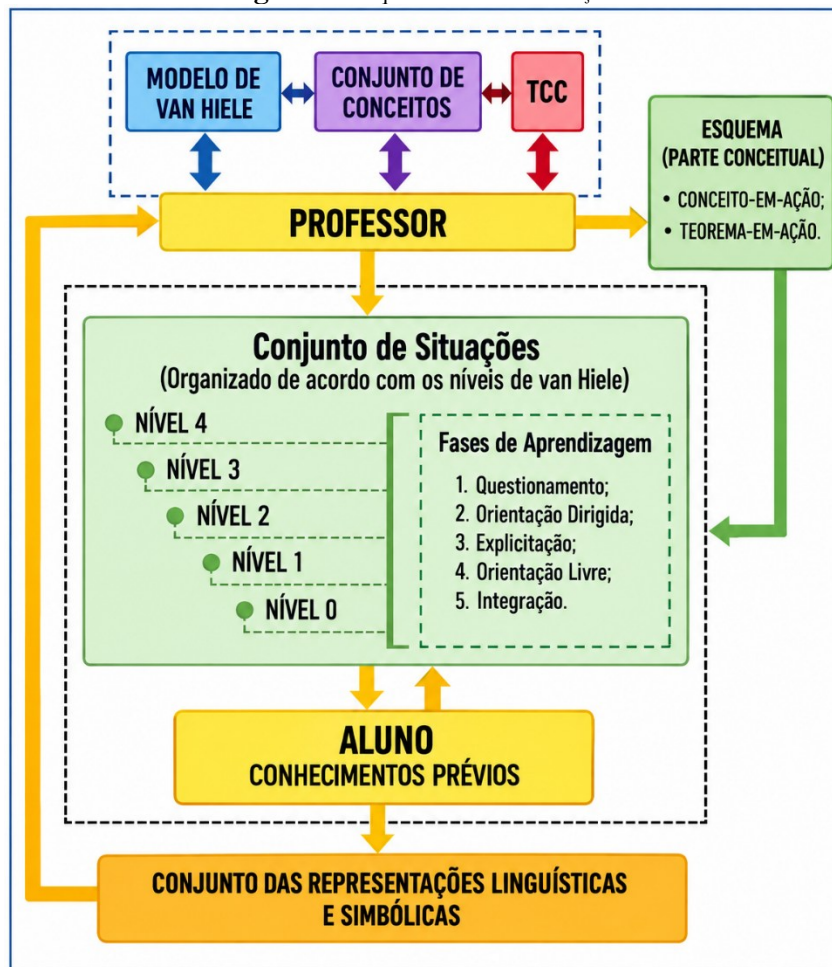
Evidencia-se que, neste estudo, considera-se o conceito de esquema como anunciado na TCC, reconhecendo que o conhecimento é adaptação. Inclusive, sobre essa questão do conhecimento, Vergnaud (2009) questiona se o conhecimento é adaptação, a que o indivíduo se adapta e quem se adapta? O próprio Vergnaud (2009, p. 13) responde ao seu questionamento com duas sentenças: “o indivíduo se adapta às situações; é por meio de uma evolução da organização de sua atividade que ele se adapta”. Isto é, no universo escolar, o aluno se adapta ao conjunto de situações que lhe é apresentado, e seus esquemas, construídos ao longo de suas experiências dentro e fora da escola, se reestruturam para conduzi-los a propostas de resolução dessas situações, culminando com a construção de novos esquemas que implicam propostas de solução das situações enfrentadas.

Diante das características das teorias exploradas, percebe-se que ambas buscam caminhos para conduzir os indivíduos a superarem as novas situações a partir de conhecimentos construídos no decurso do processo de aprendizagem, o que se pode chamar de adaptação das estruturas de resolução. Esse conjunto de situações deve ser organizado de forma a desafiar cada vez mais o

aluno e, simultaneamente, guiá-lo à superação dos seus limites, tratados no MVH como níveis de compreensão. Em síntese, as situações enfrentadas favorecem o processo de adaptação dos esquemas.

À luz da articulação entre essas teorias, supõe-se que o processo de ensino e aprendizagem pode acontecer em ciclos, nos quais professor e alunos interagem por meio de situações selecionadas para potencializarem evocações e representações de conceitos que serão analisadas pelo professor. Análises que objetivam conduzir ao (re)planejamento do novo ciclo. Dessa forma, o desenvolvimento do conhecimento geométrico do aluno acontece em ciclos e inicia-se a partir do nível zero – visualização, como proposto por van Hiele. Destaca-se que não existe, necessariamente, uma relação biunívoca entre ciclos e níveis, isto é, um único ciclo pode não dar conta de levar à superação de um nível, porém a cada ciclo novos invariantes operatórios podem ser identificados e trabalhados para superação do nível de compreensão. Observe a Figura 1 que ilustra como pode acontecer a articulação dessas teorias em ciclos.

Figura 1: Esquema de Articulação.



Fonte: Construção do Autor

Sugere-se que o professor, conhecendo os conceitos que podem ser evocados pelo campo conceitual da geometria, selecionará situações. Tal seleção acontece à luz das teorias envolvidas que apontarão: as classes de situações; o grau de dificuldade; a ordem de apresentação aos alunos; e a mediação durante a execução das situações. Segundo Pierre van Hiele (1957, p. 4), “a tarefa do educador é encontrar os meios para desenvolver a compreensão que permita ao aluno lidar com uma matéria em diferentes áreas”. Afirmativa que vai ao encontro da fala de Vergnaud (2008, p. 3), em entrevista concedida à revista Nova Escola, ao dizer que o “grande desafio do professor é ampliar as dificuldades para as crianças, mas sabendo o que está fazendo e aonde quer chegar”. Nesse contexto, em que se observa o percurso que deve ser trilhado pelo aluno sob a orientação do professor, o ponto de partida para o ensino de conceitos geométricos é uma grande contribuição da teoria de van Hiele, pois, com os níveis, é possível ajustar as situações propostas aos níveis de compreensão do aluno, fato que contribuirá para o melhor andamento do processo de ensino e aprendizagem.

Destaca-se que o processo de construção de um conceito não é visto em nenhuma das teorias como um acontecimento imediato, ao contrário, reconhecem a necessidade de se percorrer um longo caminho, ladrilhado por situações organizadas em classes e níveis hierarquicamente construídos, as quais devem ser, necessariamente, percorridas de forma ordenada e sequencial para a superação dos limites conceituais dos alunos, como no esquema da Figura 1. No qual, as situações são organizadas para serem desenvolvidas em conformidade com o MVH e a TCC, possibilitando: a identificação dos invariantes operatórios acionados nos níveis de compreensão; o tratamento desses invariantes para conduzir à construção de conceitos matemáticos; e, conseqüentemente, alcançar o domínio dos conceitos envolvidos, à medida que as situações são dominadas pelos alunos.

As teorias que compõem o arcabouço teórico deste artigo não consideram adequado submeter o aluno a uma situação que explore um conceito complexo não ajustado ao seu nível de compreensão. Conceito esse, com raízes em outros menos complexos e que poderiam ser explorados em situações preliminares, a fim de se encaminhar gradualmente ao domínio do conjunto de situações. Por exemplo, seria como propor a um aluno de 9º ano uma situação que envolva o conceito de otimização de um corpo geométrico. Essa situação não fará sentido para o aluno, não evocará esse conceito, pois ainda não teve acesso adequado ao campo conceitual das funções polinomiais, ao campo conceitual dos limites e derivadas.

Por esse motivo, a construção adequada do conjunto de situações e o reconhecimento do aluno como sujeito ativo do processo, possuidor de conhecimentos prévios, contribuem para a construção de resoluções de situações repletas de representações linguísticas e simbólicas.

Resoluções que indicam a interação do aluno com as situações propostas. Interação ilustrada na Figura 1 pelas setas amarelas que partem das situações para o aluno e do aluno às situações. Assim, o momento de interação do aluno com as situações é importantíssimo no processo de conceitualização, pois o professor pode flagrar representações verbais ou não verbais implícitas na ação do aluno.

Ao ter acesso a essas representações (veja a Figura 1), o professor pode tratá-las à luz da TCC e identificar a parte conceitual do esquema, os invariantes operatórios e, com auxílio do MVH, identificar o nível geométrico alcançado pelo aluno, favorecendo o (re)planejamento para ajustes no conjunto de situações, fechando-se, desta forma, o primeiro ciclo e dando início ao próximo (veja a Figura 1). Esses ciclos, à medida que acontecem, visam à superação das dificuldades conceituais identificadas no ciclo anterior e avanços conceituais que permitirão a constatação de que o aluno elevou seu nível de compreensão.

Acentua-se que em ambas as teorias o professor é o mediador, responsável por gerir o processo que, paulatinamente, eleva o nível de conhecimento do aluno, sujeito ativo do processo. Na TCC o principal ato de mediação é a construção de situações que possibilitem a evocação dos conceitos em estudo. Essa mediação pode ser potencializada pela teoria de van Hiele, pois estabelece o nível de compreensão geométrica do aluno através de seus níveis e reconhece o professor como mediador que, auxiliado pelas cinco fases de aprendizagem, conduz o processo de ensino para superação de cada um dos níveis de pensamento geométrico.

Ao se associarem essas teorias, supõem-se ser possível olhar para as fases do aprendizado com as lentes da TCC, sendo que a primeira fase do modelo – questionamento –, aponta para a necessidade do professor indagar sobre os conhecimentos prévios dos alunos, ou seja, conceitos implícitos ou explícitos evocados durante a ação. Enquanto a segunda fase – orientação dirigida –, devido ao papel de mediação do professor que orienta a execução das situações construídas para conduzirem à evocação dos conceitos que precisam ser abordados no nível. Na terceira fase – explicitação –, o aluno é estimulado pelo professor, por meio de questionamentos e na interação com seus colegas, a recorrer ao seu repertório de representações simbólicas e linguísticas, com o intuito de tomar consciência dos conceitos que estão sendo construídos e, ao mesmo tempo, “informar” ao professor os conceitos-em-ação e teoremas-em-ação que estão sendo evocados.

A fase da orientação livre marca a mudança de classe de situações e leva o aluno a buscar, de forma mais independente, articulação entre os conceitos abordados até a fase anterior, possibilitando a consolidação desses conceitos em um novo esquema. Nessa fase, o professor tem oportunidade de observar o processo de construção dos conceitos por meio das representações externadas pelos alunos, inclusive aquelas não verbais destacadas por Vergnaud (2009). A quinta

fase – Integração –, serve para integrar o conhecimento construído, nela o professor auxilia na elaboração da síntese encaminhando aos alunos questionamentos que auxiliem lembrar os conceitos estudados e que serão registrados para a construção de uma visão global do nível de compreensão, este é mais um momento em que o professor e o aluno podem detectar esquemas construídos ou em construção.

Essa ação de mediação, percebida em todas as fases do MVH, auxilia na detecção de invariantes operatórios que compõem os esquemas mentais dos alunos e possibilitam ao professor direcionamentos que melhor contribuirão para a evolução do conhecimento geométrico. Isto é, as fases configuram uma “região” que possibilita que ambas as teorias sejam trabalhadas simultaneamente.

Tanto na TCC quanto no MVH, é fundamental um conjunto fértil de situações favoráveis ao brotamento e consolidação dos conhecimentos prévios dos alunos que servirão de âncora para os novos conhecimentos e que são tratados na TCC como conceitos-em-ação e teoremas-em-ação. Esses invariantes operatórios compõem o esquema de resolução dos alunos que são, em essência, estruturas de pensamento responsáveis pela efetivação da ação, segundo a TCC. Nesse sentido, os níveis de van Hiele só podem ser desenvolvidos dentro de situações que valorizem e relacionem os conhecimentos prévios dos alunos com os novos conhecimentos. Olhando para o processo de conceitualização que acontece nos níveis de van Hiele com a lente da TCC, em que os conhecimentos prévios são paulatinamente elevados a novos conhecimentos, observa-se a adaptação dos esquemas já construídos pelos alunos em suas experiências anteriores.

Nessa perspectiva, uma vez percebida a evolução dos esquemas associados a cada nível, o aluno está apto a avançar um degrau em seu desenvolvimento geométrico, passando para um nível seguinte. Seguindo a lógica do MVH, o processo de adaptação dos conceitos deve acontecer de forma recorrente a cada nível, transformando os esquemas anteriores em esquemas mais “robustos”, até o aluno alcançar o último nível de van Hiele, em que seus esquemas transcendem o universo euclidiano, podendo estabelecer relações entre universos distintos da geometria. Neste artigo, supõe-se que os níveis podem ser desenvolvidos através de ciclos, como mostrado na Figura 1, nos quais o professor identifica os invariantes operatórios para serem trabalhados no ciclo seguinte, com o intuito de transformá-los em verdadeiros conceitos e teoremas matemáticos.

Desse ponto de vista, os níveis do MVH podem ser observados como estruturas de pensamento idealizadas pelos autores da teoria, que caracterizam o comportamento padronizado de alunos acerca de determinado conhecimento geométrico. Então, esses níveis de pensamento podem funcionar como uma espécie de gabarito ou “unidade de medida” capaz de auxiliar na aferição do conhecimento geométrico do aluno ou, em outras palavras, são como esquemas

padrões almejados e que se espera encontrar em alunos com determinado nível de compreensão dos conceitos geométricos explorados.

A proposta de tratar os níveis de van Hiele como esquemas de referência para a organização do pensamento sobre conceitos geométricos, permite a estruturação do processo de ensino e aprendizagem com ações mais bem direcionadas, pois o professor, fundamentado no MVH e na TCC, sabe o que ensinar, como ensinar, como melhor se aprende e a que patamar é possível elevar o conhecimento do aluno. Outrossim, os alunos, enquanto sujeitos ativos desse processo mediado por ações dialogadas que se iniciam com a construção de situações bem elaboradas, capazes de serem o referente dos conceitos geométricos estudados, podem tomar consciência de seus conhecimentos e suas evoluções em cada uma das etapas, ordenadamente construídas e vivenciadas no conjunto de situações que dão sentido aos conceitos geométricos.

Dessa maneira, os níveis de pensamento do MVH, enquanto esquemas de referência do desenvolvimento do pensamento geométrico, mostram a organização padronizada das ações do aluno frente a uma classe de situações. Repousando sobre os níveis os quatro elementos indispensáveis de um esquema: invariantes operatórios; possibilidades de inferência em situação; regras de ação; objetivos, subobjetivos e antecipações.

De fato, a ação exploratória do aluno nos níveis de van Hiele, imerso em uma situação, acontece de forma ativa e consciente, amplificada pela lente do conhecimento construído por suas experiências, advindas de contatos práticos ou teóricos com os objetos de estudo, que o levaram à construção de invariantes operatórios: conceitos-em-ação e teoremas-em-ação. Lembra-se de que os conceitos-em-ação são responsáveis pela extração de informações pertinentes ao aluno e que acionarão os teoremas-em-ação necessários para a consolidação operatória dos cálculos.

Nesse contexto de ações que ocorrem dentro dos níveis de van Hiele, o aluno constantemente faz uso de deduções elaboradas com base nas informações extraídas das situações que contribuirão para a adaptação dos esquemas pertencentes ao seu repertório, e que o guiarão à proposta de resolução da situação. Essas inferências são possíveis somente devido à construção de regras em ação de tomada de decisão e de controle, que são exatamente as responsáveis por gerir o processo de construção dos esquemas, uma vez que determinam as ações necessárias para alcançar os objetivos, subobjetivos e antecipações que são traçados, com intuito de alcançar os resultados propostos para solução da situação enfrentada e poder avançar em mais um nível do pensamento geométrico.

Por conseguinte, analisar as produções do aluno, oriundas de ações sobre situações ajustadas ao nível de van Hiele em que se encontra, com auxílio da TCC, pode auxiliar o professor na descoberta de esquemas acionados por esse aluno em ação. Logo, esses esquemas são inerentes

ao nível de desenvolvimento do pensamento geométrico. Assim, destaca-se que será possível (re)planejar o processo de ensino e aprendizagem, objetivando a transformação dos conceitos-em-ação e teoremas-em-ação evocados em verdadeiros conceitos e teoremas matemáticos, à medida que os ciclos do processo de ensino e aprendizagem acontecem e os níveis evoluem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo apresenta-se um recorte de uma pesquisa de doutorado que visa, entre outros objetivos, estabelecer complementaridade entre o Modelo do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de van Hiele e a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, a fim de contribuir para o processo de construção de conceitos geométricos. Para tanto, foi necessária a construção de um texto que pudesse mostrar essa possibilidade de complementaridade para, então, articulá-las em uma prática docente. Sendo esse o texto, de cunho bibliográfico, a base textual que inspira e conduz ao presente artigo.

Este artigo evidencia que ambas as teorias consideram fundamental, para a construção de esquemas mentais, um conjunto de situações adequadas ao nível de compreensão do aluno. Essa adequação é discutida por Nasser (1991) ao tratar, apoiada no Modelo de van Hiele, da importância de se ajustar a orientação do professor ao conhecimento geométrico alcançado por sua turma. Nessa discussão a referida autora lista estratégias que podem contribuir com a elevação desse nível, dentre as quais destaca-se: “Elevar o nível atingido pela turma através de atividades adequadas que deem oportunidade ao aluno de manusear, classificar e relacionar propriedade das diversas figuras geométricas” (NASSER, 1991, p. 34).

Essa estratégia que reafirma a importância dada às situações pela teoria de van Hiele, reconhecida pela TCC e externada por Magina *et al.* (2001, p. 8) ao dizer que se deve “estudar os conceitos matemáticos não como conceitos isolados, mas como conjunto de conceitos inter-relacionados com conjuntos de situações”. Deste modo, realçando-se que situações adequadas favorecem a ação do aluno e, novamente, sublinhando a aproximação entre van Hiele e Vergnaud, pois indica que ambas consideram a ação sobre situações como meio para serem externalizar, de forma consciente e/ou inconscientemente, conceitos através de registros verbais e/ou não verbais.

Ante o exposto, esta pesquisa nos leva a supor que, no campo conceitual da geometria, o Modelo de van Hiele auxilia o professor a ajustar um conjunto de situações ao nível do aluno, que, através da ação, evoca representações linguísticas e simbólicas que representam conceitos relacionados ao conjunto de situações e aos repertórios de resoluções acionados, os quais são esquemas mentais, logo possuem invariantes operatórios: conceito-em-ação e teorema-em-ação, importante para a avaliação do processo de conceitualização, pois podem, à luz da TCC, ajudar na

identificação do nível de compreensão geométrica do aluno e, assim, contribuir para o processo de ensino e aprendizagem. Ademais, permite ao professor refletir sobre o processo e suas intervenções. Assim, a articulação entre o MVH e a TCC aponta para uma possível contribuição que é a amplificação da capacidade de avaliação do professor, devido, a partir da ação do aluno, valorizarem o processo de construção do conhecimento que deve acontecer à medida que as situações são dominadas.

Portanto, é possível vislumbrar pesquisas que visem implementar práticas docentes ancoradas na Teoria de van Hiele e na Teoria de Vergnaud, pois essa aproximação encaminha para a construção de um conjunto de situações do campo geométrico adequado ao nível de compreensão do aluno e propício à manifestação de conhecimentos prévios, encontrados nos registros escritos (cálculos, esboços de figuras, gráficos), gestos ou diálogos estabelecidos que são reflexos do processo de conceitualização. Por isso esses conhecimentos prévios são importantíssimos, uma vez que pode mostrar que um invariante operatório, identificado anteriormente, foi matematizado em novas representações. Outrossim, esta pesquisa aponta que o conjunto de situações é o locus no qual essas teorias se complementam e os invariantes operatórios o “ponto” de ligação entre as teorias, pois ambas miram nesses conceitos em formação para verificar se a conceitualização está ocorrendo e, assim, (re)planejar o processo de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

BITTAR, Marilena. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais para o estudo das dificuldades dos alunos na passagem da Geometria Afim à Geometria Vetorial. In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Orgs.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. 1ª ed., Curitiba: CRV, 2009. p. 53 – 76.

BRANDÃO, J. C. MATEMÁTICA E DEFICIÊNCIA VISUAL. 2010. 152 f. Tese (Doutorado). Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação. Fortaleza, 2010. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/3110/1/2010_Tese_JCBrandao.pdf. Acesso em: 10 set. 2020.

CAMPOS, Tânia M. M.; MAGINA, Sandra M. P.; CAZORLA, Irene M. e SANTANA, Eurivalda R. dos S. As estruturas aditivas nas séries iniciais do Ensino Fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v.10. pp. 219-239, 2007. Disponível em: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362007000200003&lng=es&nrm=iso. Acesso em: 05 fev. 2021.

CORBERÁN SALVADOR, R. M.; GARRIGUES, P. H. P. J. M.; PASCUAL, A. P.; PÉREZ, E. **R. DIDÁCTIC DE LA GEOMETRIÀ: MODELO VAN HIELE**. València: Publicacions de la Universitat de València, 2014. E-book Kindle.

COSTA, C. Visualização, veículo para a educação em geometria. In: SARAIVA, M. J.; COELHO, M. I.; MATOS, J. M. (Orgs.). Ensino e aprendizagem da geometria. In: Encontro de Investigação em Educação Matemática, 9., 2000, Fundão. **Anais eletrônicos...** Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2000. p. 157-184. Disponível em: http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2000.pdf. Acesso em: 13 ago. 2020.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 3ª ed., São Paulo: Atlas S.A, 1991.

KALEFF, A. M. *et al.* Desenvolvimento do pensamento geométrico – o modelo de Van Hiele. **Bolema**. Rio Claro, v. 9, n. 10, 1994. ISBN 978-85-89082-23-5. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10671/7055>. Acesso em: 24 jan. 2020.

LEVAIN, Jean-Pierre. **Aprender a matemática de outra forma**: desenvolvimento cognitivo e proporcionalidade. Lisboa: Instituto Piaget, 1997.

MACHADO, Nílson José. **Matemática e língua materna**: análise de uma impregnação mútua. 6.ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MAGINA, Sandra; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; NUNES, Terezinha; GITIRANA, Verônica. **Repensando adição e subtração**: contribuições da teoria dos campos conceituais. 2. ed. São Paulo: Editora PROEM, 2001.

MOREIRA, M. A. Aprendizaje Significativo, Campos Conceptuales y Pedagogía de la Autonomía: Implicaciones para la Enseñanza. **Aprendizagem Significativa em Revista/Meaningful Learning Review**, Porto Alegre, v. 2, n. 1, p. 44-65, 2012. Disponível em: https://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID24/v2_n1_a2012.pdf. Acesso em: 11 dez. 2021.

MOURA, L. K. J. **Visualização dinâmica no ensino de geometria**. 2018. 265 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso. Cuiabá, 2018. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popUp=true&id_trabalho=7160259. Acesso em: 09 set. 2019.

MUNIZ, C. A. O conceito de “esquema” para um novo olhar para a produção matemática na escola: as contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Orgs.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. 1ª ed., Curitiba: CRV, 2009. p. 37 – 52.

NASSER, Lilian. **Níveis de van Hiele: Uma explicação definitiva para as dificuldades em geometria?** In: Boletim GEPEM/UFRJ, n. 29, p. 31-35, Rio de Janeiro, 1991. Disponível em: <http://costalima.ufrj.br/index.php/gepem/article/view/48/30>. Acessado em 10 jul. 2020.

PALMERO, M. L. R.; MOREIRA, M. A. La teoría de los campos conceptuales de Gérard Vergnaud. In: MOREIRA, Marco Antonio (Org.). **La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área**. Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS, 2004, p. 7-39.

PASTOR, A. J. **APORTACIONES A LA INTERPRETACIÓN Y APLICACIÓN DEL MODELO DE VAN HIELE: LA ENSEÑANZA DE LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO. LA EVALUACIÓN DEL NIVEL DE RAZONAMIENTO**. 1993. 772 f. Tese (Doutorado).

Universitat de Valencia, Departament de Didàctica de les Matemàtiques. Valencia, 1993. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/71029372.pdf>. Acesso em: 24 jan. 2020.

VAN DE WALLE, John A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. Porto Alegre: Penso, 2009. E-book Kindle.

VAN HIELE-GELDOLF, D. **The didactics of geometry in the lowest class of secondary school**. 1957. 206 p. Tese (Doutorado). Universidade Real de Utrecht. Utrecht, 1957. Tradução para o inglês de Fuys, D., 1984. Disponível em: <https://eric.ed.gov/?id=ED287697>. Acesso em: 24 jan. 2020.

VAN HIELE, P. M. **El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)**. 1957. 151 f. Tese (Doutorado em Matemáticas e Ciências Naturais). Universidad Real de Utrecht. Utrecht, 1957. Tradução para o espanhol de Gutiérrez, A. et. Al., 1991. Disponível em: <http://www.uv.es/gutierre/aprengcom/archivos2/VanHiele57.pdf>. Acesso em: 24 jan. 2020.

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Curitiba: UFPR, 2009.

VERGNAUD, Gérard. La teoria de los campos conceptuales. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 10, n. 23, 1990, p. 133-170. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/122730/mod_resource/content/1/art_vergnaud_espanhol.pdf. Acesso em: 27 nov. 2019.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender? In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Orgs.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. 1ª ed. Curitiba: CRV, 2009. p. 13 – 35.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, v. 1, p. 75-90, 1986. Disponível em: https://repositorio.ispa.pt/bitstream/10400.12/2150/1/1986_1_75.pdf. Acesso em: 17 out. 2019.

VERGNAUD, Gérard. QUELQUES ORIENTATIONS THEORIQUES ET METHODOLOGIQUES DES RECHERCHES FRANÇAISES EM DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES. **Recherches em Didactique des Mathématiques**. v. 2, n. 2, 1981, p. 215-232. Disponível em: <https://revue-rdm.com/1981/quelques-orientations-theoriques-et-methodologiques-des-recherches-francaises-en-didactique-des-mathematiques/>. Acesso em: 17 jan. 2021.

VERGNAUD, Gérard. **Todos perdem quando a pesquisa não é colocada em prática**: 01 set. 2008. Entrevista concedida a Gabriel Pillar Grossi. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/960/gerard-vergnaud-todos-perdem-quando-a-pesquisa-nao-e-colocada-em-pratica>. Acesso em: 30 mar. 2021.