

GEOMETRIA: CONECTANDO DOBRADURAS COM A TEORIA DE VAN HIELE

GEOMETRY: CONNECTING FOLDS WITH VAN HIELE'S THEORY

Anne Desconsi Hasselmann Bettin¹ 

Gilmar Steigleder Paschoal² 

José Carlos Pinto Leivas³ 

Resumo

Este artigo resulta de uma atividade avaliativa de uma disciplina do doutorado, na qual foram envolvidas noções básicas de dobraduras abordando a Teoria de Van Hiele. Como desenvolvimento da atividade, em um primeiro momento, foi aplicado um questionário de sondagem a alunos de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, cujo professor é o segundo autor. Posteriormente, foi desenvolvida uma atividade com a técnica de dobraduras sobre os conceitos introdutórios de geometria: ponto, reta, plano, semirreta, segmento de reta, ponto médio e classificação das retas. Por último, foi aplicado um novo teste. A pesquisa teve como objetivo geral analisar o nível de desenvolvimento do raciocínio em geometria, a partir de estratégias de dobradura, envolvendo conceitos geométricos euclidianos. Concluímos que os estudantes conseguiram representar os conceitos geométricos tendo maior dificuldade em escrevê-los formalmente e que as atividades de dobraduras contribuíram para desenvolver a visualização e a percepção das representações dos objetos matemáticos envolvidos. Também, foi possível verificar o avanço da maioria dos estudantes na passagem do Nível 1 para o Nível 2, segundo a Teoria de Van Hiele.

Palavras-Chave: Geometria, Dobradura, Teoria de Van Hiele, Níveis, Ensino Fundamental.

Abstract

This article is the result of an evaluative activity of a doctoral course, in which basic notions of folding were involved, approaching Van Hiele's Theory. As a development of the activity, at first, a survey questionnaire was applied to students in the 6th and 7th grades of Elementary School, whose teacher is the second author. Subsequently, we developed an activity with the folding technique on the introductory concepts of geometry: point, line, plane, ray, line segment, midpoint and classification of lines. Finally, we apply a new test. The research had as general objective to analyze the level of development of reasoning in geometry, from folding strategies, involving Euclidean geometric concepts. We concluded that the students were able to represent the geometric concepts having greater difficulty in writing them formally and that the folding activities contributed to developing the visualization and perception of the representations of the mathematical objects involved. Also, it was possible to verify the progress of most students in the passage from Level 1 to Level 2, according to Van Hiele's Theory.

Keywords: Geometry, Folding, Van Hiele's Theory, Levels, Elementary School.

¹ Universidade Franciscana (UFN) - annedesconsi@gmail.com - <https://orcid.org/0000-0003-1834-164X> - <http://lattes.cnpq.br/5491202340393139>

² Universidade Franciscana (UFN) - gilmarpaschoal2016@gmail.com - <https://orcid.org/0000-0003-4532-6656> - <http://lattes.cnpq.br/3083036862767250>

³ Universidade Franciscana (UFN) - leivasjc@gmail.com - <https://orcid.org/0000-0001-6876-1461> - <http://lattes.cnpq.br/0314545667166824>

Introdução

Segundo a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018, p. 272), “No Ensino Fundamental – Anos Finais, o ensino de geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas”. A Base orienta para a importância da geometria no Ensino Fundamental. Para desenvolver o pensamento geométrico nos estudantes, a Geometria Euclidiana Plana pode se tornar mais atrativa com a manipulação de materiais de forma lúdica e criativa, estimulando a coordenação motora e a visualização por meio do uso de dobraduras, por exemplo.

Trabalhos, como o de Gimenez (2012), Dias (2015), Pin e Uribe (2016), reforçam a ideia de que a dobradura pode ser utilizada como recurso pedagógico para o ensino e a aprendizagem de geometria.

O presente trabalho decorre de uma disciplina de Geometria em um programa de pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, cursada pelos dois primeiros autores, doutorandos, e conduzida pelo terceiro, em uma instituição privada no sul do Brasil, no segundo semestre de 2020, de forma remota em virtude da COVID-19. A disciplina oportuniza aos participantes proporem atividades diferenciadas que possam ser aplicadas à escola básica, tendo por base os conteúdos e metodologias desenvolvidas nas aulas.

Assim, como finalização da referida disciplina, os autores elaboraram uma sequência de atividades a serem aplicadas a estudantes do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, em turmas regulares do segundo autor. Tal sequência teve por objetivo explorar dobraduras associando-as a conceitos elementares de Geometria Euclidiana de maneira significativa e lúdica.

Dessa forma, esperamos contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos envolvidos, uma vez que as atividades foram planejadas em consonância com os níveis de raciocínio no ensino introdutório de Geometria, embasadas na Teoria de Van Hiele.

Em função de que o professor da turma do 6º ano necessitava aplicar uma atividade avaliativa ao final do período letivo, ele reuniu-se com a primeira autora e planejaram a atividade aqui relatada e analisada e, com isso, também cumpriram o processo avaliativo da disciplina de Geometria do doutorado.

O 7º ano participou da atividade, pois não tiveram esse conteúdo no ano anterior e o professor titular considera importante que eles também tenham a oportunidade de aprender os conteúdos desenvolvidos nessas atividades propostas.

As turmas escolhidas para a aplicação foram: a) turma 61, composta por 30 estudantes; b) turma 62, também composta por 30 estudantes; c) turma 71, composta por 29 estudantes. Todas pertencentes a uma Escola Estadual de Educação Básica, no ano de 2020. A faixa etária dos

estudantes do 6º e 7º anos abrange dos 9 aos 11 anos. Um facilitador para a aplicação da atividade foi o fato de o professor ser o titular das turmas e contar com a participação da primeira autora, como sua auxiliar, na sua aplicação junto aos estudantes.

Devido à pandemia do Covid-19, a atividade foi aplicada de forma remota e em uma pequena parcela de estudantes do 6º e 7º anos, totalizando 21 participantes. Foram abordados os seguintes assuntos: introdução de conceitos de geometria: ponto, reta, plano, semirreta, segmento, ponto médio e classificação das retas.

Toda a atividade foi desenvolvida com a técnica de dobraduras, com o olhar para os níveis da Teoria de Van Hiele.

Justificamos o desenvolvimento deste projeto devido a um estudo em uma das disciplinas do doutorado, Geometria: Ensino e Aprendizagem, na qual foram empregadas, inicialmente, técnicas de dobraduras para, posteriormente, reproduzi-las no GeoGebra. Além disso, é objetivo da disciplina, replicação da aprendizagem obtida em escola básica ou superior.

Para a realização da pesquisa, foi elaborada uma sequência de atividades que buscaram analisar em que nível de desenvolvimento de pensamento geométrico, segundo a Teoria de Van Hiele, encontravam-se os participantes e se haveria avanço do nível 1 para o 2 no decorrer da sequência aplicada.

No campo da compreensão, para Van Hiele, o estudo da geometria é desenvolvido quando o aluno, a partir dos dados e relações geométricas que lhe são fornecidos, é capaz de chegar a uma conclusão em situações diferentes de seu cotidiano e divide-se em cinco níveis.

É importante, também, indicar as condições apresentadas por Van Hiele na formação da compreensão, que haja: interesse do estudante por determinado tema; aprofundamento nos assuntos; utilização adequada do material didático; contato pessoal com outros estudantes e os mecanismos de controle.

Ainda, para concluir, nesta teoria, o professor pode fazer uso de questionamentos a fim de verificar se o estudante é capaz de chegar à solução de um problema ou ler um texto sem a ajuda do professor. Assim, chegamos à seguinte questão de pesquisa: Qual é o nível de raciocínio geométrico apresentado pelos estudantes do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental antes e depois da aplicação das atividades de Geometria Plana explorando a técnica de dobraduras?

No que se segue, apresentamos o objetivo da pesquisa, bem como as etapas a serem realizadas, a fim de responder ao problema abordado neste trabalho.

Objetivos

A partir dos pressupostos definidos anteriormente, a pesquisa aqui descrita e relatada teve o seguinte objetivo geral: analisar o nível de desenvolvimento do raciocínio em geometria, a partir de estratégias de dobradura, envolvendo conceitos geométricos euclidianos planos.

A fim de cumprir o objetivo geral da pesquisa, foram definidos os seguintes objetivos específicos por etapa da investigação:

- Caracterizar o nível de raciocínio geométrico apresentado pelos estudantes do 6º ano e 7º ano, antes do início das atividades;
- Promover o reconhecimento de ponto, reta e plano, com a técnica de dobraduras em uma folha A4;
- Introduzir, com a mesma técnica de dobraduras: classificação de retas e estudo de semirreta, segmento de reta e ponto médio.

Fundamentação teórica

A Geometria tem um papel de vital importância no desenvolvimento do raciocínio e na resolução de problemas, em que se pode observar, interpretar e representar os espaços e formas encontradas no mundo que nos rodeia.

Podemos observar, a partir da experiência dos autores, que os estudantes do Ensino Fundamental, Anos Finais, apresentam grande dificuldade na compreensão e apropriação de conceitos básicos de geometria, os quais já deveriam ter sido adquiridos na faixa etária dos sujeitos investigados.

Outro fator que aumenta essa dificuldade é a abordagem como foram desenvolvidos esses conceitos nos Anos Iniciais. A forma de desencadear geometria parece não ter contribuído para o desenvolvimento do estudante, pois ela é vista em geral de maneira teórica, com replicação de fórmulas ou partes de um saber cultural.

Os estudantes são levados a memorizar nomes, teoremas e aplicação de fórmulas, o que os leva a não gostarem da geometria. Consideramos haver falta de preparo do professor em trabalhar com a geometria, tendo como agravante o livro didático ser mal utilizado e, muitas vezes, a única fonte de informação para o professor.

Para isso, entendemos que envolver os estudantes de uma maneira lúdica, usando as dobraduras, pode lhes oportunizar uma sólida formação no ensino e na aprendizagem de geometria.

De acordo com o Referencial Curricular Gaúcho (RCG), é esperado que os estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental sejam capazes de identificar características das formas geométricas.

No Ensino Fundamental - Anos Iniciais, espera-se que os alunos identifiquem e estabeleçam pontos de referência para a localização e o deslocamento de objetos, construam representações de espaços conhecidos e estimem distâncias, usando, como suporte, mapas (em papel, *tablets* ou *smartphones*), croquis ou outras representações. Em relação às formas, espera-se que os estudantes indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais e suas planificações e vice-versa. (RIO GRANDE DO SUL, 2018 p. 53).

Como consequência dessas informações e também de acordo com o RCG, temos que os estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental devem ser capazes de ratificarem as aprendizagens em geometria.

No Ensino Fundamental - Anos Finais, o ensino de geometria precisa ser visto como consolidação das aprendizagens já realizadas. Devem realizar tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando os elementos variantes e invariantes, visando conceitos de congruência e semelhança, conceitos essenciais para reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e realizar demonstrações simples, que desenvolvem o raciocínio hipotético-dedutivo. (RIO GRANDE DO SUL, 2018, p.53).

Com auxílio do modelo de aprendizagem de geometria que teve sua origem no trabalho de dois professores holandeses, Pierre M. Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof, e resultou na Teoria de Van Hiele, é pretensão desta investigação adaptar seus níveis na aprendizagem dessa área, por meio de uma sequência de atividades que possam mostrar progresso nos níveis dos participantes.

Como a geometria tem um papel importante na resolução de problemas, propomo-nos a utilizá-la para a elaboração desta pesquisa. Essa teoria enaltece a importância de habilidades de natureza geométrica, as quais podem ser igualmente importantes para os estudantes, por exemplo: visualização, dedução informal e formal, dentre outras.

No ensino de geometria, a linguagem e os conceitos geométricos são muito importantes, pois os estudantes desenvolvem formas diferentes de pensamento que lhes permitem compreender o ambiente que os rodeia, possibilitando várias formas de apresentação dessa área do conhecimento. Uma abordagem bem elaborada e fundamentada permite o entendimento, a visualização e a exploração de espaços e formas, o que pode ser expresso por meio de desenhos, nos quais os estudantes usem sua capacidade de investigação, representação e exploração para entender propriedades e conceitos geométricos.

A Teoria de Van Hiele

Van Hiele afirma que o aprendizado em geometria segue cinco níveis de raciocínio ou níveis de desenvolvimento mental, em que cada um deles tem estrutura própria, pela qual o estudante passa para desenvolver o pensamento geométrico.

Nível 1: visualização ou reconhecimento. Neste nível, o estudante tem uma percepção global das figuras, sem identificar suas propriedades. Exemplo, na observação de um conjunto de várias figuras, o estudante observa cada uma delas de forma isolada, sem prestar muita atenção nos atributos de cada figura. Não faz comparações, isto é, sua percepção é individual. A descrição é feita através de comparações de objetos com formas geométricas, sendo assim, o que vale aqui é o aspecto físico.

O estudante opera em figuras geométricas, tais como triângulos e linhas paralelas através da identificação e atribuição de nomes e compará-los de acordo com sua aparência. A percepção é apenas visual. Um aluno que possui um raciocínio no nível 1 reconhece certas formas diferenciadas sem prestar atenção às suas partes componentes. Por exemplo, pode ser um retângulo reconhecido, porque parece "como uma porta" e não porque tem quatro lados retos e quatro ângulos retos como não há nenhuma apreciação dessas propriedades. Forma é importante e figuras podem ser identificadas pelo nome. (VAN HIELE, 1986, p.33).

Nível 2: Análise. Neste nível, o estudante dá início ao reconhecimento de conceitos geométricos e propriedades. Identifica partes, propriedades geométricas de uma figura e passa a fazer uso dessas informações para resolver problemas, mas ainda não relaciona as propriedades entre figuras diferentes. Ainda não compreende definições formais. A caracterização de uma forma se dá por meio de exemplos comuns, experimentações e muitas observações.

O estudante descobre propriedades/regras de uma classe de formas empiricamente, tais como dobramento, medição, analisa figuras em termos de seus componentes e relacionamentos entre os componentes. A este nível, os componentes e seus atributos são usados para descrever e caracterizar as figuras. Por exemplo, um estudante que está raciocinando analiticamente diria que um quadrado tem quatro lados iguais "e" quatro cantos "quadrados". O mesmo estudante, no entanto, não pode acreditar que uma figura pode pertencer a diversas classes gerais e tem vários nomes, por exemplo, o aluno não pode aceitar que um retângulo é um paralelogramo. A figura a este nível se apresenta como uma totalidade de suas propriedades. Um estudante pode ser capaz de afirmar uma definição, mas não terá entendimento. (VAN HIELE, 1986, p.33).

Nível 3: Dedução informal ou classificação. Neste nível, o estudante encontra-se em condições de fazer relações entre as propriedades de uma figura e de identificar que uma propriedade pode decorrer de outra, comparando-as entre si, fazendo assim distinção entre as figuras. Exemplo, na figura de um quadrado, ele consegue perceber todas as propriedades de um retângulo.

Neste nível, consegue fazer classificações abrangentes, acompanhar e formular argumentos e provas informais, porém ainda não entende o significado de uma dedução nem tem condições de elaborar argumentos e provas formais completas.

O estudante opera realizando as relações entre a representação figural com o que há dentro de uma figura e entre figuras relacionadas. Existem dois tipos de

pensamento neste nível. Em primeiro lugar, o aluno compreende as relações abstratas entre figuras, por exemplo, verifica as relações entre um retângulo e um paralelogramo, em segundo lugar o estudante pode usar dedução para justificar observações feitas no nível 2. O papel da definição das propriedades e da capacidade de construir provas formais não são compreendidas, embora nesse nível não é uma compreensão da essência da geometria. (VAN HIELE, 1986, p.34).

Nível 4: Dedução. Neste nível, o estudante consegue elaborar demonstrações formais. Faz distinções entre postulados, teoremas e definições, compreende o processo dedutivo, a recíproca de um teorema. Os estudantes conseguem construir provas. Para provar uma afirmação, toma por base propriedades já provadas que são utilizadas em uma sequência. Tem uma visão global das demonstrações, podendo chegar ao mesmo resultado por caminhos diferentes. Por fim, ocorre a formulação de problemas com enunciados precisos.

O estudante prova teoremas deduzindo e estabelecendo inter-relações entre redes de teoremas. O aluno pode manipular as relações desenvolvidas no nível 3. A necessidade de justificar os relacionamentos é compreendido e usado definições suficientes que podem ser desenvolvidos. O raciocínio neste nível inclui o estudo da geometria como uma forma de sistema matemático ao invés de uma coleção de formas. (VAN HIELE, 1986, p.34).

Nível 5: Rigor. Neste nível, o estudante está apto a fazer uma análise de outras geometrias, dentre elas a não euclidiana, compreendendo e fazendo comparações. É importante salientar que o estudante consegue utilizar sistemas dedutivos abstratos, sendo capaz de fazer ligações entre os conceitos geométricos e até mesmo desenvolver novos postulados.

O aluno estabelece teoremas em diferentes sistemas de postulados e análises e compara estes sistemas. O estudo da geometria no nível 5 é altamente abstrato e não envolve necessariamente modelos concretos ou pictóricos. A este nível, os postulados ou axiomas tornam-se objeto de intenso escrutínio rigoroso. A abstração é primordial. (VAN HIELE, 1986, p.35).

Além dos níveis de desenvolvimento de pensamento geométrico descritos por Van Hiele, é fundamental considerar a dimensão epistemológica da mediação docente na transição entre esses níveis. Duval (2003) argumenta que a simples manipulação perceptiva não basta para desencadear mudanças cognitivas. O avanço conceitual em Matemática depende essencialmente da coordenação entre diferentes registros de representação que é um processo eminentemente mediado.

Assim, a mediação docente assume um papel estruturante no qual o professor cria situações didáticas que induzem os alunos a deslocarem-se de um tratamento essencialmente visual (Nível 1) para um tratamento discursivo-analítico das formas geométricas (Nível 2), fazendo perguntas orientadoras, identificando lacunas e auxiliando na construção de novos conceitos.

Desse modo, o referencial de Duval permite interpretar o avanço entre os níveis 1 e 2 não apenas como um desenvolvimento natural das estruturas mentais, mas como um processo epistemologicamente orientado de transição de registros, cujo êxito está diretamente vinculado à qualidade da mediação docente.

Assim, ao utilizar dobraduras como recurso pedagógico, compreendemos que tais materiais não apenas motivam, mas funcionam como dispositivos epistemológicos que possibilitam transformar representações figurais em descrições geométricas formais, ampliando a compreensão conceitual e apoiando a progressão nos níveis de pensamento geométrico.

Dobraduras

As dobraduras podem ser utilizadas para o ensino e a aprendizagem de certas construções geométricas elementares, afirma Gimenez (2012), como retas paralelas, retas perpendiculares, bissetriz de um ângulo, mediatriz de um segmento, figuras geométricas simétricas, entre outras, o que também pode ser feito com régua e compasso.

Segundo Dias (2015, p.11),

[...] por intermédio do uso das dobraduras de papel, o ensino da geometria passa a favorecer associações entre conteúdos abstratos e problemáticas cotidianas, isto porque na confecção de cada dobradura tornam-se extremamente necessárias articulações de estratégias geométricas para efetuar tais construções. Além disso, constituem-se em material didático que transforma o ensino-aprendizagem em uma atividade atraente e motivadora onde os alunos podem desenvolver sua experimentação geométrica e a visão espacial.

A utilização da dobradura como recurso pedagógico, material manipulável, tem por finalidade estimular a capacidade de fazer perguntas, visualizar, abstrair, o que facilita a compreensão de conceitos geométricos.

Pin e Uribe (2016, p. 40) comentam que:

Humiaki Huzita, matemático ítalo-japonês e destaque no estudo do origami, descreveu seis operações básicas para a construção de figuras por meio de dobradura. Em 1989, Jaques Justin escreveu um artigo onde ele citava, além dos seis axiomas de Huzita, um outro axioma, descrito por Hoshiro Hatori.

Conforme estudo de Pin e Uribe (2016), é possível relacionar os axiomas de Huzita-Hatori com a Geometria Euclidiana Plana, em que a folha A4 é considerada como sendo o plano (parte dele, já que é limitada) e cada linha de dobra efetuada representa uma linha reta (idem). Por exemplo, dado um ponto P na folha, essa ao ser dobrada, não passando por P, o leva no seu simétrico P' em relação a linha de dobra (que é a reta). Desta forma, os axiomas comandam as construções via dobraduras.

Diferentemente dos sólidos geométricos, a Geometria Plana é bastante abstrata, mas é importante no desenvolvimento do raciocínio do estudante e para o seu cotidiano. Dessa forma, a utilização da dobradura se apresenta como um importante recurso pedagógico.

Procedimentos Metodológicos

O presente trabalho tem uma abordagem qualitativa, pois, segundo Moreira (2002), essa tem como foco a interpretação que o pesquisador tem da situação sob estudo. A ênfase aqui é na subjetividade e no processo para a formação de um conceito por meio de dobraduras para verificar os níveis de Van Hiele de estudantes na realização de atividades geométricas.

Foi utilizada para a realização deste estudo a metodologia qualitativa na observação de uma situação de sala de aula, em que foi proposta uma tarefa que cada estudante desenvolveu e, ao final, foram apresentados os resultados.

A coleta de dados se deu por fotos, por gravação de vídeo (ferramentas que serviram como recursos para qualificar a investigação) e realização de atividades fornecidas impressas e seus respectivos registros.

O *Google Classroom* foi escolhido como ambiente virtual de aprendizagem, pois esse é o ambiente utilizado pela escola. Esse permitia uma maior interação entre os estudantes. Nele, foram postados dois questionários, bem como as atividades, as quais foram realizadas *on-line* de forma dialogada, a partir de um passo a passo para cada dobradura. Além disso, foram apresentadas definições de entes geométricos ainda desconhecidos pelos estudantes. Essa atividade foi desenvolvida durante dois encontros de duas horas aulas cada uma via *Google Meet*. Também foram disponibilizados na escola o conteúdo e as atividades impressas para os alunos que não tinham acesso à internet.

O questionário inicial foi aplicado para verificar o conhecimento prévio dos alunos antes das atividades realizadas com dobraduras.

Nesse questionário, colocamos figuras nas quais o estudante deveria assinalar: a) na questão 1, as que apresentavam ideias de ponto; b) na questão 2, as que apresentavam a ideia de reta; c) na questão 3, aquelas que apresentavam a ideia de plano; d) na questão 4, as que apresentavam representação similares a semirreta; e) na questão 5, a ideia de segmento de reta.

Já na questão 6, o estudante deveria assinalar com (RPa) os pares de retas paralelas; com (RPe), os pares de retas perpendiculares; com (RC), os pares de retas concorrentes e, com (RCo), os pares de retas coincidentes.

As questões de 7 a 10 eram para conceituar a ideia de ponto, de reta, de plano e de segmento de reta, citando dois exemplos em cada caso. Nas questões 11 e 12, necessitavam registrar como diferenciariam retas perpendiculares de retas concorrentes; também de retas paralelas e retas coincidentes, respectivamente.

Nas atividades realizadas com dobraduras, procuramos respeitar as Fases de Aprendizagem do modelo Van Hiele: interrogação, orientações dirigida, explicação, orientação livre e integração.

Assim, por meio das dobraduras, os estudantes exploraram cada situação, fazendo perguntas e formulando conjecturas que foram testadas com a manipulação das dobras e uso de instrumentos de medida, como a régua, o que serviu para justificar as discussões orais e conclusões.

Na atividade 1, buscamos desenvolver por meio das dobraduras as noções elementares de geometria, como ponto, reta e plano, além da classificação das retas em paralelas, concorrentes, coincidentes e perpendiculares.

Já na atividade 2, foram retomados os conceitos trabalhados na atividade 1 e ampliado o estudo por meio das dobraduras para os conceitos de semirreta, segmento de reta e ponto médio.

Na atividade 3, foi aplicado um segundo questionário com questões de marcar e responder, buscando verificar nas três primeiras questões o que os estudantes compreenderam sobre os conceitos de plano, reta e ponto, fazendo também, por meio de um desenho, as representações geométricas desses elementos. Depois, foi solicitado como tarefa de casa que tirassem uma foto das representações desses conceitos geométricos percebidos no seu cotidiano e postassem no formulário do *Classroom*.

Na questão 4 os estudantes deveriam diferenciar a ideia de retas perpendiculares de retas concorrentes e na questão 5 diferenciar a ideia de retas paralelas de retas coincidentes.

A questão 6 trazia na opção a) a imagem de duas semirretas paralelas, b) dois segmentos de retas paralelas e c) duas retas paralelas representadas geometricamente, os estudantes deveriam marcar a opção que representa melhor as retas paralelas.

Na questão 7 os estudantes deveriam assinalar a opção que representava retas coincidentes. Nessa questão as opções figurais eram a) de duas retas concorrentes, b) duas retas coincidentes e na letra c) duas retas perpendiculares.

E por fim, na questão 8, os estudantes deveriam assinalar a opção que representava as retas perpendiculares.

Resultados e Discussões

As atividades iniciaram-se em novembro de 2020, quando convidamos os estudantes para participarem da aula. Isso foi feito por meio de vídeos curtos como uma divulgação motivadora. Em seguida, o questionário inicial para verificar o conhecimento dos alunos foi disponibilizado no *Google Classroom*, dois dias antes do início da aula. Posteriormente, após as atividades com dobraduras, foi disponibilizado o outro questionário.

No dia 02 de dezembro de 2020, foi realizada a primeira aula pelo *Google Meet*, quando foram realizadas atividades com as dobraduras. Neste dia, contamos com a presença de 21 estudantes, quando explicamos como seriam as aulas e como seria a dinâmica para a realização das atividades, principalmente, com espaço para diálogos com os colegas e professores.

Já no dia nove de dezembro de 2020, tivemos o segundo encontro pelo *Google Meet*, ocasião em que foi dada continuidade às atividades iniciadas na aula anterior, sendo solicitado que os estudantes enviassem uma foto da elaboração de sua atividade relativa à aula anterior.

Os dados coletados revelaram, em um primeiro momento, pouco conhecimento dos estudantes sobre os temas introdutórios de geometria: ponto, reta e plano.

No primeiro questionário aplicado, os estudantes conseguiram, em grande maioria, representar corretamente a primeira parte da atividade em que tinham que marcar as respostas conforme as figuras.

O estudante A1, assim como os demais, foi capaz de reconhecer as figuras como um todo, identificando os termos propostos inicialmente, conforme indica a Teoria de Van Hiele em seu Nível 1, em que as representações das figuras geométricas são identificadas pelo seu aspecto global.

Com relação às dobraduras, na primeira atividade, os estudantes não tinham a ideia real de como a iniciariam; de como explorariam elementos da geometria por meio de dobraduras; o que era preciso fazer e como fazer. Assim, a visualização foi um fator importante do raciocínio matemático nesse processo, conforme preconiza (PONTE *et al.*, 1998).

A exploração matemática da atividade e sua administração didática foi necessária pelos professores para que ocorresse um diálogo entre professor-estudantes. Isso, segundo Ponte *et al.* (1998), não deve ser muito aberto e nem muito específico para motivar os estudantes na investigação. Exemplifica-se com o trecho das falas dos estudantes representados na pesquisa por A1, A2, A3, ..., A21, e pelos professores por P1 e P2, obtidas pelas transcrições das gravações-vídeos da aula.

P1: Vocês dobraram a folha, marcaram bem o vinco da dobra, então, agora desdobrem a folha e respondam: o que representa a linha de dobra na nossa folha, folha esta que representa uma parte do nosso plano?

A2: Parece uma reta.

(Diálogo entre professor e o aluno, 2020).

Na resposta do estudante, não há uma convicção, pois ele responde “parece uma reta”, mostrando que a representação não tem significado matemático formado. O estudante não diferencia o objeto matemático de sua representação, existindo apenas a percepção visual por se parecer com uma reta e não por propriedades, mostrando estar no nível 1 de Van Hiele.

O estudante A3 indica ser “uma linha”, enquanto o estudante A1 afirma ser “um triângulo”. Veja que ainda falta a ideia de plano, pois ele percebe a folha como um retângulo e ao dobrá-la, ele a visualiza como um triângulo formado pelos limites da folha e a linha de dobra. A formação dos conceitos de plano e de reta vão se formando pela visualização, com exploração da situação e formulação de conjecturas testadas e verificadas pela manipulação das dobras.

Durante o diálogo entre estudantes e professores, A1 retoma a resposta anterior afirmando ser uma linha reta, ao que P1 lhe questiona: “Sempre será uma linha reta?”. O professor P1 ainda questiona se o que vemos é uma representação fiel do conceito que estamos construindo e o professor P2 questiona se ela, a linha, poderia representar outro objeto matemático, mostrando a folha de modo curvado como se esta parte do plano fosse como uma superfície cilíndrica, instigando-os a investigar a situação.

No que segue, continua o diálogo com o estudante A1.

A1: Sem os limites da folha é uma linha reta.

P2: Observem a folha levemente curvada, as bordas opostas da folha quase se tocando. Se eu fizesse assim com a folha, continuaria sendo reta?

P1: Essa linha é reta ainda?

A1: Não. É uma linha curva.

(Diálogo entre professores e o aluno, 2020).

Na tentativa de ampliar o diálogo e as descobertas do estudante, o professor P1 segue questionando:

P1: Como é que você a chamaria?

A3: Uma linha curvada.

P1: Onde é que enxergávamos essa linha curva?

A2: Quando a gente vai viajar, tem a rodovia, a elevação da rodovia.

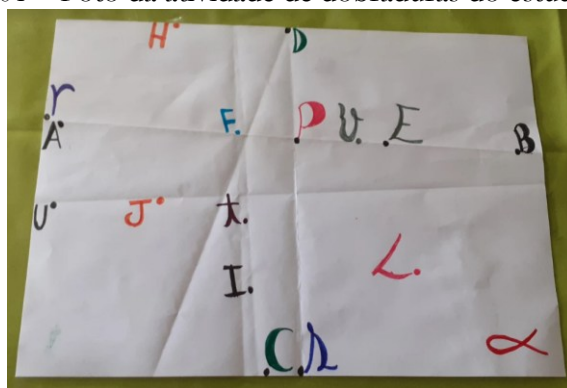
(Diálogo entre professores e o aluno, 2020).

Por meio desses fragmentos da gravação da aula, podemos perceber como é importante os estudantes desenvolverem a experimentação geométrica e a visualização para a formação do pensamento geométrico (Nível 1 de Van Hiele). O ensino de geometria com o uso das dobraduras favoreceu a aprendizagem de conteúdos geométricos relacionando-os com o cotidiano do estudante, pois conforme Dias (2015) “constituem-se em material didático que transforma o ensino-

aprendizagem em uma atividade atraente e motivadora onde os alunos podem desenvolver sua experimentação geométrica e a visão espacial” (p. 11).

Com relação às dobraduras, os estudantes não tiveram dificuldades em representá-las na folha, com algumas exceções, como o estudante A2. Esse aluno não colocou o ponto K na reta u, colocou o ponto V na reta r, o que gerou erro na interpretação do conceito, isto é, ocorreu uma troca da reta v pelo ponto V e o ponto K não foi colocado sobre a reta o que dificultou o desenvolvimento do conceito de retas paralelas. Com relação ao ponto C, deveria estar localizado sobre a reta s e não na reta t, como fora solicitado nos encaminhamentos. Sobre a reta t, faltou ele representar os pontos G e H, como é ilustrado na Figura 01.

Figura 01 – Foto da atividade de dobraduras do estudante A2



Fonte: dados da pesquisa.

Por tal incompreensão ou erro de interpretação, foi necessário fornecer um acompanhamento individualizado a ele a fim de que pudesse refazer a atividade.

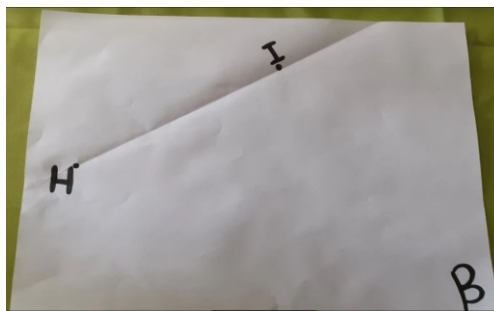
Com essa atividade, também foi possível constatar que a maioria dos alunos perceberam os conceitos de plano e ponto esperados com a atividade. No caso das retas, podemos concluir que os estudantes conseguiram identificar a classificação retas: retas paralelas, retas concorrentes e retas coincidentes sem muita dificuldade.

Em relação ao estudante A2, esse foi capaz de reconhecer conceitos geométricos ao identificar as retas e propriedades que as diferenciam em relação ao posicionamento no plano. Entretanto, ele ainda não relaciona propriedades entre retas diferentes, conforme a teoria de Van Hiele em seu Nível 2. Por exemplo: o estudante identifica as retas perpendiculares obtidas na dobradura, identifica a propriedade de se cruzarem em ângulo reto. Porém, quando a reta se encontra entre outras retas diferentes, como retas perpendiculares e concorrentes, não a identifica como tal.

A criação de situações, quando ocorreu a discussão de conceitos por meio de reflexão e da validação das atividades realizadas pelos estudantes para que eles desenvolvessem a apreciação da investigação matemática e do pensamento matemático, é uma estratégia que foi usada pelos professores para estimular e promover a reflexão dos estudantes, conforme preconiza Ponte *et al.* (1998).

Na atividade desenvolvida no dia nove de dezembro, foram retomados os conceitos de plano, ponto e reta, momento em que apresentamos a ideia de semirreta, segmento de reta e ponto médio conforme Figura 02.

Figura 02 – Atividade de semirreta do estudante A3



Fonte: dados da pesquisa.

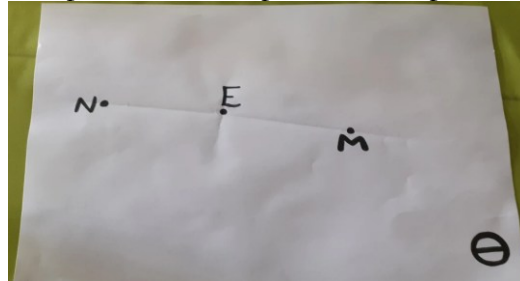
Visualizamos aqui a ideia de uma semirreta, pois apresenta a origem da semirreta no ponto H uma vez que a dobra está somente à direita de H. Assim, conclui-se que o estudante passa do Nível 1, da visualização ou reconhecimento, para o Nível 2, da análise. Ele verifica que a semirreta tem origem, ponto H, mas não tem extremidade, ou seja, passa pelo ponto infinitamente (no sentido de H para I).

O estudante descobre a propriedade que define a semirreta e a analisa pela dobradura para formar uma definição baseada na visualização. Para Duval (2003), ao relacionar a que se refere o signo (dobradura) com o significado que este representa (semirreta), o estudante consegue identificar a representação semiótica de um objeto matemático, o que corresponde à habilidade de visualização. Desta forma, A3 compreende o conceito de semirreta e as propriedades que não estão visíveis na representação dessa semirreta por dobradura.

Para a ideia de segmento de reta, os estudantes pegaram uma outra folha e representaram dois pontos no plano θ (representado pela folha), o ponto N e o ponto M, dobrando a folha entre os dois pontos, dando a ideia de segmento de reta, corretamente. Como fora solicitado aos estudantes que dobrassem a folha de modo que o ponto N ficasse sobreposto ao ponto M, houve a representação do ponto médio que o estudante A3 denotou de E. Com isso, posteriormente, foi

caracterizado o conceito de ponto médio e verificadas algumas propriedades, como medidas e distâncias, conforme ilustrado na Figura 03.

Figura 03 – Representação do ponto médio pelo estudante A3



Fonte: dados da pesquisa.

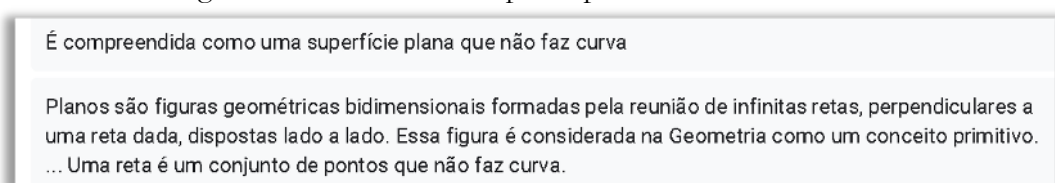
Os estudantes mediram a distância de N até E e de E até M, ou seja, a medida dos segmentos NE e EM, verificando que são iguais, o que caracteriza E como ponto médio de um segmento de reta. Com isso, interpretamos que o estudante se encontra no Nível 2. Constatamos, no entanto, que alguns estudantes não fizeram essa representação corretamente, pois dobraram a folha de um lado ao outro, misturando conceitos de reta e segmento de reta. Isso demonstrou que tais indivíduos não saíram do Nível 1 de Van Hiele, tendo prevalecido apenas a percepção visual individual e não o reconhecimento global.

No segundo questionário, o tema foi dividido em partes da seguinte forma: conceito, representação geométrica pelo aluno e foto de objeto ou representação vislumbrada no cotidiano de cada um.

Nesse segundo questionário, as novas ideias e formas de representação bem como conexões foram necessárias para reforçar a aprendizagem geométrica do grupo investigado. Esse é um dos papéis do professor, o qual deve ser exercido no transcorrer de um trabalho investigativo, conforme afirma Ponte *et al.* (1998).

Com relação aos conceitos, foi atingido o objetivo, conforme Figura 04, os estudantes apresentaram corretamente os conceitos de plano, reta e ponto, porém percebermos que alguns estudantes copiaram conceitos da internet.

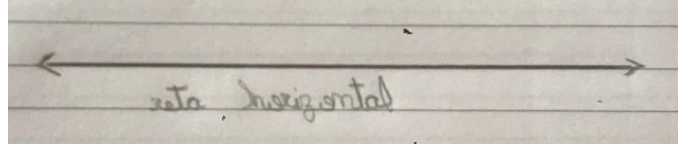
Figura 04 – O conceito de plano pelos estudantes A5 e A6



Fonte: dados da pesquisa.

Na representação geométrica apresentada por A7, o objetivo foi alcançado, conforme Figura 05, na qual o registro figural do objeto matemático reta foi feito corretamente.

Figura 05 – Representação geométrica do estudante A7



Fonte: dados da pesquisa.

O principal problema neste quesito da pesquisa foi nas fotos do cotidiano fornecidas, uma vez que misturaram o conceito de reta com o de segmento de reta. Poucos estudantes conseguiram, de maneira correta, apresentar uma foto que representasse a ideia de reta. O estudante A8 tirou uma foto de uma faixa de pedestre para representar a ideia de reta, não conseguindo associar um conceito a diferentes tipos de representações.

Segundo a Teoria de Van Hiele, o estudante reconhece como reta por parecer uma linha e não por ser ilimitada nas duas extremidades, isto é, não há apreciação das propriedades que caracterizam a reta. O estudante segue uma percepção individual segundo a teoria, encontrando-se no Nível 1.

Nesse caso, o estudante não conseguiu transitar entre os conceitos e as representações, apresentando dificuldade em visualizar ao relacionar com o cotidiano alguns conceitos geométricos. Segundo Duval (2003), é importante transitar entre os diferentes registros para compreender um conceito, ele afirma que “a compreensão em Matemática implica a capacidade de mudar de registro” (DUVAL, 2003, p. 21).

Foi percebido que os estudantes conseguiram diferenciar retas concorrentes de retas perpendiculares, conforme resposta do estudante A9 (Figura 06).

Figura 06 – Diferenciar retas concorrentes de perpendiculares do estudante A9

Quando as retas possuem um único ponto em comum e cruzam-se, são chamadas de concorrentes. Se as retas concorrentes formarem ângulos de 90° , ou seja, ângulos retos, elas serão perpendiculares.

Fonte: dados da pesquisa.

Os estudantes conseguiram atingir o Nível 2 de Van Hiele nesse quesito, uma vez que houve a diferenciação entre retas paralelas e coincidentes.

O que mais chamou a atenção dos pesquisadores foram as questões 06, 07, 08 nas quais a turma 62 apresentou uma melhora significativa em relação às outras turmas.

Conforme Van Hiele (1986), na observação de um conjunto de várias figuras, o estudante observa cada uma delas de forma isolada, sem prestar muita atenção nos atributos de cada uma; não faz comparações, isto é, sua percepção é individual, o que o faz permanecer no Nível 1.

Segundo Ponte *et al.* (1998), as atividades devem ser abordadas sob diferentes perspectivas e com diversos graus de dificuldade para o aprimoramento matemático e o avanço nos níveis de desenvolvimento de pensamento de Van Hiele. Desta forma, ao introduzir as atividades, foi utilizada uma variedade de linguagens como a oral, a escrita e a figural (dobradura) e, conforme preconiza Duval (2003), elas são necessárias para que o estudante possa transitar entre os diferentes níveis, a fim de que a aprendizagem ocorra, sendo possível, então, verificar em qual nível os estudantes se encontram e se conseguiram avançar de nível.

Neste processo, é importante verificar que a maioria dos estudantes foram capazes de relacionar a visualização, a dobradura e os conceitos matemáticos envolvidos nas atividades para a construção do pensamento geométrico.

Apesar dos resultados positivos observados, é importante reconhecer as limitações metodológicas deste estudo como o tamanho amostral reduzido devido a influência da pandemia de COVID-19, pois a maioria dos alunos não tinham acesso à internet, computador ou celular. Embora não sendo estatisticamente representativa e dificulte a generalização dos resultados, para esse grupo participante da atividade, ficou evidenciada uma passagem do Nível 1 para o Nível 2 na maioria dos alunos do sexto e do sétimo ano.

Tais limitações não invalidam os resultados obtidos, mas indicam caminhos importantes para futuras pesquisas que desejem compreender com maior robustez o impacto da mediação docente e dos materiais manipuláveis na aprendizagem geométrica.

O avanço observado decorre das dobraduras com a mediação docente, nas explicações em tempo real e o engajamento colaborativo dos estudantes. Assim, os resultados indicam troca de nível, porém condicionados a um conjunto de fatores simultâneos que limitam conclusões generalizadas.

O uso de materiais manipuláveis favoreceu a aprendizagem geométrica ao funcionar como mediador entre diferentes registros de representação, permitindo que os estudantes transitem do plano perceptivo para formas mais abstratas de tratamento e conversão semiótica, conforme proposto por Duval. Essa coordenação de registros criou condições para que os alunos avançassem dos níveis iniciais de Van Hiele, centrados no reconhecimento visual, para o Nível 2.

Assim, embora as dobraduras não produzam por si só o raciocínio dedutivo, elas auxiliam na reorganização cognitiva para que o estudante formule propriedades, estabeleça relações e desenvolva modos de argumentação compatíveis com os níveis de Van Hiele.

Conclusão

O presente trabalho mostrou que os estudantes conseguiram representar conceitos de plano, reta e ponto, tendo maior dificuldade em registrar em língua materna os de objetos matemáticos envolvidos no primeiro questionário. As atividades de dobraduras, no entender dos investigadores e pelas respostas do questionário final, ajudaram a desenvolver a visualização e a percepção das representações dos objetos matemáticos estudados.

Na investigação proposta, a exploração e a formulação de questões abrangeram todas as etapas das atividades, nas quais os estudantes foram desafiados e levados a fazer reflexões, formular conjecturas e realizar testes. Após isso, os discentes precisaram reformular as conjecturas ou conceitos prévios e avaliados, tanto no raciocínio, quanto nos resultados obtidos durante a investigação, conforme preconiza Ponte, Brocardo e Oliveira (2003).

De maneira geral, durante a realização das atividades, os estudantes conseguiram cumprir o que foi solicitado, compreendendo os conceitos propostos, pois desenvolveram uma boa visualização e percepção ao associar os entes geométricos dos objetos do cotidiano encontrados, apresentando noções básicas geométricas e pouco desenvolvimento na formulação de conceitos matemáticos.

Com base nas fotos e vídeos, os estudantes conseguiram encontrar uma relação ou padrão entre os objetos do cotidiano e o conteúdo matemático envolvido nas atividades propostas.

O nível de raciocínio geométrico apresentado pelos estudantes do 6º e 7º anos, antes do início das atividades, era o Nível 1, pois tinham a percepção global das figuras que representam o ponto, a reta e o plano, mas não identificavam suas propriedades.

Após promover o reconhecimento de ponto, de reta e de plano, com a técnica de dobraduras e introdução com a mesma técnica a classificação de retas, estudo de semirreta, estudo de segmento de reta e de ponto médio, verificamos que o nível de raciocínio geométrico apresentado pelos estudantes evoluiu.

Para alguns, o Nível 1, de visualização ou reconhecimento, tendo a percepção global das figuras foi atingido, porém não identificaram suas propriedades. Outros souberam comparar os objetos com formas geométricas, isto é, as comparações efetuadas são identificadas pela nomenclatura e aparência, sem prestar atenção nos atributos de cada figura, ou seja, suas

propriedades, o que demonstra que os estudantes ainda estão desenvolvendo e construindo seu pensamento geométrico no primeiro nível.

Para outros, o nível de raciocínio geométrico apresentado é o Nível 2, de análise, pois “o estudante dá início ao reconhecimento de conceitos geométricos” Van Hiele (1986, p.33), que estão iniciando ao estudar e identificar por vezes os objetos, “mas ainda não relaciona as propriedades entre figuras diferentes. Não compreende definições” Van Hiele (1986, p.33). Esses sabem exemplificar, construir conceitos geométricos a partir de dobraduras, da visualização e da percepção os aspectos globais e propriedades que os definem.

Portanto, as dobraduras possibilitaram fazer a transição do primeiro nível que se caracteriza por um reconhecimento global e predominantemente perceptivo das figuras para o segundo que demanda a identificação de propriedades e de relações internas entre seus elementos, transitando entre diferentes modos de representação, conforme proposto por Duval (2003). Esse movimento favorecido com a intervenção docente possibilitou aos alunos transitar por diferentes modos de representação, permitiu confrontar interpretações intuitivas e avançar para formas de raciocínio fundamentadas em propriedades geométricas ampliando a compreensão conceitual.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. MEC. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 17 set. 2020.

DIAS, M. C. de O. **O uso do origami como recurso didático-metodológico para o ensino de geometria**. 2015. 59p. Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Juiz de Fora. Disponível no Repositório Institucional da UFJF: <<https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/1443>>. Acesso em: 17 set. 2020.

GIMENEZ, P. **Doblar una hoja de papel para hacer ... matemáticas**. Disponível na internet: <https://www.researchgate.net/publication/296477131_Doblar_una_hoja_de_papel_para_hacer_matematicas>. Acesso em: 17 set. 2020.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S.D.A.(Org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2003. p. 11-33.

MOREIRA, D. A. **O Método Fenomenológico na Pesquisa**. São Paulo: Pioneira Thomson, 2002.

PIN, O. J. URIBE, E. B. O. **Os Axiomas de Huzita-Hatori e o Ensino da Geometria Euclidiana Plana através da Construção de Polígonos.** *In:* Colloquium Exactarum, vol. 8, n. Especial, Jul-Dez, 2016, p. 39-44. Disponível em: <<http://www.unoeste.br/site/enepe/2016/suplementos/area/Exactarum/Matem%C3%A1tica/OS%20AXIOMAS%20DE%20HUZITA-HATORI%20E%20O%20ENSINO%20DA%20GEOMETRIA%20EUCLIDIANA%20PLANA%20ATRAV%C3%89S%20DA%20CONSTRU%C3%87%C3%83O%20DE%20POL%C3%8DGNOS.pdf>>. Acesso em: 17 set. 2020.

PONTE, J.P., BROCARDO, J., OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., BRUNHEIRA, L., VARANDAS, J. M., FERREIRA, C. **O trabalho do professor numa aula de investigação matemática.** Quadrante, 7(2), 1998. p. 41-70. Disponível em: <<https://repositorio.ulisboa.pt/entities/publication/f3763b66-6f0b-4dc0-9f1e-67dbead21a8b>>. Acesso em: 30 nov. 2025.

RIO GRANDE DO SUL. Secretaria de Estado da Educação. Departamento Pedagógico. União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação. **Referencial Curricular Gaúcho: Matemática.** Porto Alegre. Secretaria de Estado da Educação. Departamento Pedagógico. 2018.

VAN-HIELE, P. M. **Structure and Insight.** Academic Press Orlando, FL, USA, 1.